Diferenciabilidade fracionário na Teoria dos Números

Enno Nagel [*]

Estas são as notas que acompanham a minha palestra sobre "Diferenciabilidade fracionária na Teoria dos Números" ministrada no dia 26 de Novembro 2012 no Séminario Aritmética y Geometría em Valparaíso.

Contents

[*] Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió

1 Funções diferençáveis sobre os números reais

Olharemos primeiro a situação clássica sobre $\mathbb{R}$. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition. Uma função f é $\mathscr{C}^1$ no ponto $x_0 \in X$ se

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

exista. Então f é $\mathscr{C}^1$ se f é $\mathscr{C}^1$ em todos os pontos $x_0 \in X$ e é contínua.

Proposition 1.1. *(Seja X compacto.) O espaço $\mathscr{C}^1(X, \mathbb{R})$ com a norma*

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \max\{\|f\|_{\sup}, \|f'\|_{\sup}\}$$

é completo.

Proof: Usa teorema fundamental do cálculo. □

Se $\mathbb{R}$ é substituído por um corpo $\mathbf{K}$ não-Arquimediano, esta proposição falha. Mas em qualquer forma precisamos de uma compensação deste resultado visto que queremos construir *completamentos* de G-representações por estas $\mathscr{C}^r$-funções. Por isso vamos mudar a definição de diferenciabilidade tal que este enuncio fica correto. Primeiro observamos o seguinte:

Proposition 1.2. *A função $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ se e só se a função*

$$f^{]1[}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

definida para todos $x, y \in \mathrm{X}$ desiguais estende-se a um função $f^{[1]} \colon \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ contínua.

Proof: A direção $\Longleftarrow$ é fácil. Na outra direção, se $(x,y) \to (a,a) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Então

$$f^{]1[}(x,y) = f'(\xi) \to f'(a) = f^{[1]}(a,a) \quad \text{com } \xi \in [x,y]$$

onde a primeira identidade é verdadeira graças ao teorema do valor médio e a segunda porque f é contínua. Isto é suficiente visto que $f^{[1]}(\mathrm{X} \times \mathrm{X}) \subseteq \overline{f^{]1[}(\{(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} \text{ diferentes}\})}$ pela construção. □

Corollary. *(Seja X compacto.) O espaço $\mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ é completo.*

Proof: Como visto acima, a norma $\|f\| = \max\{\|f\|_{\sup}, \|f^{[1]}\|_{\sup}\}$ é igual a norma

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \max\{\|f\|_{\sup}, \|f'\|_{\sup}\}.$$

Quanto a primeira norma, esta proposição é clara. □

2 Funções r-vezes diferençáveis sobre espaços p-ádicos vetoriais

Definição da diferenciabilidade de grau 1

Seja $\mathbf{K}$ um corpo não-Arquimediano não-trivialmente avaliado completo – por exemplo $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_p((t))$ e as extensões deles. Visto que nesse caso não há o teorema do valor intermédio com todas suas consequências, em particular o teorema do valor médio usado na prova da Proposição Proposition 1.2 acima, propõe se a definição seguinte para obter um equivalente da Proposition 1.1:

Definition. Sejam $\mathrm{X} \subseteq \mathbf{K}$ aberto e $f \colon \mathrm{X} \to \mathbf{K}$. Então f é $\mathscr{C}^1$ no ponto $a \in \mathrm{X}$ se

$$\lim_{(x,y) \to (a,a)} f^{]1[}(x,y) \quad \text{com } f^{]1[} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ e } x, y \text{ diferentes}$$

existe. Então f é $\mathscr{C}^1$ se f é $\mathscr{C}^1$ em todos os pontos $a \in \mathrm{X}$ ou igualmente se $f^{]1[}$ estende a uma função $f^{[1]}$ contínua.

Agora nos ocupamos nos do problema de iterar a noção de diferenciabilidade: Como definir uma função duas vezes diferençável? Observamos que neste caso $f^{[1]}$ é uma função em duas variáveis (ao contrario da função $f^{[1]}$ no caso real) e não podemos iterar esta definição diretamente. Então já é necessário estudar o caso de muitas variáveis para definir a diferenciação múltipla de uma função de uma variável. Recordemo-nos da definição de uma função derivável em argumentos múltiplos.

Definition. Sejam V e $\mathbf{E}$ espaços vetoriais de dimensões finitas, $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{V}$ aberto e $f\colon \mathrm{X} \to \mathbf{E}$. Então f é $\mathscr{C}^1$ no ponto $a \in \mathrm{X}$ se existe uma aplicação linear A tal que para todos $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ aberto tal que

$$f(x+h) - f(x) = \mathrm{A} \cdot h + \mathrm{R}(x+h, x)$$

com o resto satisfazendo $\|\mathrm{R}(x+h,x)\| \leq \varepsilon\|h\|$ para todos $x, y \in \mathrm{U}$.

Diferenciabilidade iterada

Isto não permite diretamente dar uma definição de diferenciabilidade general, mas motiva a boa perspetiva para proceder em geral.

Definition. Sejam $\mathrm{V}, \mathbf{E}, \mathrm{X} \subseteq \mathrm{V}$ e $f\colon \mathrm{X} \to \mathbf{E}$ como acima e supomos que V já tem uma escolha de coordenadas. (Isto é $\mathrm{V} = \mathbf{K}^d$ com $e_1, \ldots, e_d$ a base natural.) Então f é $\mathscr{C}^1$ se para todos $x+h, x \in \mathrm{X}$ com $h \in \mathbf{K}^{*d}$ a função $f^{]1[}(x+h,x)$ definida por

$$(x+h, x) \mapsto \mathrm{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}, \mathbf{E})$$

com

$$\mathrm{A} \cdot h_k e_k = f(x + h_1 e_1 + \cdots + h_{k-1} e_{k-1} + h_k e_k) - f(x + h_1 e_1 + \cdots + h_{k-1} e_{k-1})$$

estende-se a uma função contínua $f^{[1]}\colon \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}, \mathbf{E})$.

Notamos que $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \subseteq \mathrm{V} \times \mathrm{V}$ é de novo um espaço vetorial com coordenados naturais e $\mathrm{im}\, f \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}, \mathbf{E})$ é de novo um espaço vetorial de dimensão finita.

Definition. Dizemos que $f\colon \mathrm{X} \to \mathbf{E}$ é $\mathscr{C}^2$ se f é $\mathscr{C}^1$ e $f^{[1]}\colon \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathrm{V}, \mathbf{E})$ é $\mathscr{C}^1$. (E em geral f é $\mathscr{C}^n$ se f é $\mathscr{C}^{n-1}$ e $f^{[n-1]}$ é $\mathscr{C}^1$.

Diferenciabilidade de grau real

Lembremo-nos de que o objetivo era dar uma definição de funções r-vezes diferençáveis para $r \geq 0$ em $\mathbb{R}$. Por isso, escrevemos $r = \nu + \rho$ com $\nu \in \mathbb{N}$ e $\rho \in [0, 1[$.

Definition. Sejam $V, \mathbf{E}, X \subseteq V$ e $f: X \to \mathbf{E}$ como acima. Então f é $\mathscr{C}^\rho$ no ponto $a \in X$ se para todos $\varepsilon > 0$, existe um $U \subseteq X$ aberto tal que

$$\|f(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \|x - y\|^\rho \quad \text{para todos } x, y \in U.$$

Em seguida f é $\mathscr{C}^\rho$ se f é $\mathscr{C}^\rho$ em todos os pontos $a \in X$.

Definition. Dizemos que f é $\mathscr{C}^r$ se f é $\mathscr{C}^\nu$ e $f^{[\nu]}$ é $\mathscr{C}^\rho$.

Propriedades naturais deste espaço

Com esta definição concluída podemos estudar as propriedades destas funções. Isto fez parte da minha tese. Visto que a definição é complicada e até o momento não tínhamos muita teoria sobre a diferenciabilidade, mesmo as propriedades naturais exigem de bastante trabalho para verificá-las. Por exemplo, nos ([Nag11]) provamos o seguinte:

(i) É possível dar uma definição de diferenciabilidade local num ponto.

(ii) As funções r-vezes diferençáveis podem ser compostas.

Em particular, ter uma boa definição de uma função r-vezes diferençável sobre uma variedade r-vezes diferençável. (Não depende dos atlantes da variedade.)

(iii) O espaço $\mathscr{C}^r(X, \mathbf{E})$ tem naturalmente uma topologia que torna-o um espaço completo localmente convexo. Então as funções localmente polinomiais de grau $\leq r$ e também as funções polinomiais (globalmente) densas em $\mathscr{C}^r(X, \mathbf{E})$.

No caso de uma variável sobre $\mathbb{Q}_p$ podemos dar descrições mais fáceis das funções r-vezes diferençáveis.

(iv) Seja $X \subseteq \mathbf{K}$ aberto. Então f é uma $\mathscr{C}^r$-função se o resto de polinômio de Taylor

$$R_\nu f(x + h, x) = f(x + h) - [f(x) + f'(x)h \cdots - f^{(\nu)}(x)/\nu! h^\nu]$$

satisfaz uma função de duas variáveis $x + h, x$ uma condição de convergência de grau $o(|h|^r)$.

(v) Seja $X = \mathbb{Z}_p^d$. O espaço de Banach $\mathscr{C}^0(X, \mathbf{K})$ (de funções contínuas) tem uma base ortogonal importante que chama-se **base de Mahler**. Mostra-se que as funções $\mathscr{C}^r(X, \mathbf{K})$ são as cujos coeficientes de Mahler $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^d}$ satisfazem $|a_n| n^r \to 0$ quando $|n| = n_1 + \cdots + n_d \to \infty$.

(vi) Como consequência dos pontos anteriores, nos obtemos que sobre conjuntos abertos $U \subseteq \mathbb{Q}_p^d$, as funções r-vezes diferençáveis podem ser descritas igualmente para uma condição de convergência do polinômio de Tayor.

3 Programa de Langlands p-ádico

Seja $\mathbb{F}$ um corpo p-ádico, isto é, uma extensão finita de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbf{E}$ uma extensão finita (bastante grande) de $\mathbb{F}$. Vamos estudar ações de grupos com coeficientes em $\mathbb{F}$ (o *corpo do grupo*) sobre espaços vetoriais sobre $\mathbf{E}$ (o *corpo de coeficientes*).

Definition. Uma **representação de Galois p-ádica** é uma ação contínua do grupo $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ sobre um $\mathbf{E}$-espaço vetorial de dimensão finita.

Definition. Seja $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Uma G-**representação de Banach unitária** é uma ação do grupo G sobre um $\mathbf{E}$-espaço de Banach V tal que a topologia deste pode ser definido por uma norma G-invariante. (Isto é $\|v^g\| = \|v\|$ para todos $v \in V$ e $g \in G$.)

O programa de Langlands p-ádico: Vagamente, procura uma bijeção *natural* (a precisar) $\rho \mapsto \Pi(\rho)$ entre as categorias seguintes:

$$\{\text{representações } p\text{-ádicas de } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}) \text{ de dimensão } n\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{representações de Banach unitárias de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}.$$

- Se $n = 2$ e $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$ esta conjetura tem um sentido preciso, a bijeção é mesmo funtorial, e foi verificada por Colmez, Berger, Breuil e outros.
- Em todos os outros casos, seja $n > 2$ ou $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}_p$ sabemos praticamente nada.

Em [BS07] os autores associam a uma certa família de representações de Galois *cristalinas* $\{\rho\}$ uma certa G-representação *localmente algébrica* V, isto é,

$$\{\rho\} \mapsto V = \text{ representação localmente algébrica }.$$

Conjetura de Breuil e Schneider: Se certas condições necessárias naturais são satisfeitas, então V permita um completamento unitário $V \hookrightarrow \hat{V}$ não-nulo.

A vaga esperança é que todas as representações de Banach unitárias $\Pi(\rho)$ correspondentes fatorem através de $\hat{V}$, isto é,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\rho \arrow[dr, hook] & & \Pi(\rho) \\
\vdots & \hat{U} \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\
\rho \arrow[ur, hook] & & \Pi(\rho)
\end{tikzcd}$$

4 Representação localmente algébrica

Indução de uma Representação

Notação. Sejam o corpo do grupo $\mathbb{F}$ respetivamente de coeficientes $\mathbf{E}$ e $G = GL_n(\mathbb{F})$ como previamente.

Subgrupos importantes em G: Fixamos os seguintes notações:

- Seja $T \subseteq G$ o toro em G, i.é o subgrupo de matrizes diagonais com valores em $\mathbb{F}^*$ e $T_0 \subseteq T$ seu subgrupo aberto compacto máximo com valores $\o_{\mathbb{F}}^*$, as unidades do anel dos inteiros $\o_{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$.
- Seja P respetivamente $\bar{P}$ o subgrupo de matrizes triangulares superiores respetivamente inferiores em G, e
- N respetivamente $\bar{N}$ o subgrupo de P respetivamente $\bar{P}$ de matrizes cujos valores diagonais equivalem 1. Seja $N_0 \subseteq N$ o subgrupo compacto aberto com valores em $\o_{\mathbb{F}}$.

O método mais evidente para construir representações sobre um corpo p-ádico $\mathbf{E}$ desse grupo é o seguinte: Pegamos

- Copias de grupos menores $T_1 = GL_{n_1}(\mathbb{F}), \ldots, T_d = GL_{n_d}(\mathbb{F})$ com $n_1 + \cdots + n_d = n$, e
- Representações $\mathbf{E}$-lineares $\chi_1, \ldots, \chi_d$ delas.

Seja $T = T_1 \times \cdots \times T_d \subseteq G$ o produto delas e escrevemos $\chi = \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_d$ para a representação de T associada pelo produto tensorial destas.

Definition. A G-representação **E**-linear, ou igualmente o **E**[G]-modulo, **induzida** $\mathrm{ind}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}\,\chi$ do **E**[T]-modulo χ ao grupo G é definida como o **E**[G]-modulo

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}\,\chi = \chi \otimes_{\mathbf{E}[\mathrm{T}]} \mathbf{E}[\mathrm{G}].$$

O Exemplo mais elementar.

- Sejam $n_1 = \ldots = n_d = 1$, isto é, $\mathrm{T}_1 = \ldots = \mathrm{T}_d = \mathbb{F}^*$, e
- $\chi_1, \ldots, \chi_d \colon \mathbb{F}^* \to \mathbf{E}^*$ caracteres.

Obtemos $\chi \colon \mathrm{T} \to \mathbf{E}^*$. Como $\mathbb{F}^*$ é abeliano e $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{\mathrm{ab}}$ (= quociente abeliano máximo), segue que χ se estende unicamente através da projeção natural $\mathrm{P} \to \mathrm{T}$ ao caráter $\chi \colon \mathrm{P} \to \mathbf{E}^*$.

Descrição explicita: A G-representação induzida se descreve explicitamente como

$$\mathrm{ind}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\mathrm{G}}\,\chi = \{f \colon \mathrm{G} \to \mathbf{E} : f(\bar{p}g) = \chi(\bar{p}) \cdot f(g) \text{ para } \bar{p} \in \bar{\mathrm{P}}, g \in \mathrm{G}\},$$

onde G opera pela translação a direita notada por $f^g := f(\cdot g)$.

Escrevemos de agora em diante sucintamente $i(\chi)$ para $\mathrm{ind}_{\bar{\mathrm{P}}}^{\mathrm{G}}\,\chi$.

Liso, algébrico e localmente algébrico

Além da estrutura de grupo G tem duas propriedades adicionais:

- A sua topologia totalmente desconexa herdada do corpo $\mathbb{F}$, e
- a sua estrutura de variedade algébrica.

Definition. Seja V uma G-representação. Um vetor v em V é **liso** respectivamente **algébrico** respectivamente **localmente algébrico** se a sua órbita

$$\begin{aligned} o_v \colon \mathrm{G} \to & \quad \mathrm{V} \\ g \mapsto & \quad g \cdot v \end{aligned}$$

é uma aplicação **localmente constante** respectivamente **racional** respectivamente **localmente racional**.

Anotamos que o_v é **localmente algébrico** se há um espaço da dimensão finita $\mathrm{V}_0 \subseteq \mathrm{V}$ e um grupo aberto $\mathrm{G}_0 \subseteq \mathrm{G}$ tais que $o_v \colon \mathrm{G}_0 \to \mathrm{V}_0$ é (a restrição de) uma aplicação algébrica.

Definition. Denotamos com $i(\chi)^{\mathrm{lc}}$ respectivamente $i(\chi)^{\mathrm{alg}}$ respectivamente $i(\chi)^{\mathrm{la}}$ a G-subrepresentação dada por todos vetores *lisas* respectivamente *algébricos* respectivamente *localmente algébricos* em $i(\chi)$.

Visto que G opera pelas translações temos explicitamente que

- $i(\chi)^{\mathrm{lc}}$ consisti das funções localmente constantes,
- $i(\chi)^{\mathrm{alg}}$ nas funções algébricas de G, isto é, das funciones polinomiais nas coordenadas $\{X_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ de G e a sua determinante $\det(X_{11}, \ldots, X_{nn})$, e
- $i(\chi)^{\mathrm{la}}$ das funções sobre G que se restringem localmente a uma função algébrica dessas.

A representação V de Breuil e Schneider

- Um caráter $\theta \colon T \to \mathbf{E}^*$ é **não-ramificado** se ele é trivial sobre $T_0 \subseteq T$ (e então fatorando através do quociente $T/T_0 = \mathbb{Z}^n$ deles).
- Um caráter algébrico $\psi \colon T \to \mathbb{F}^*$ é **dominante** se ele é da forma

  $$(t_1, \ldots, t_n) \to t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$$

  onde as potencias satisfazem $i_1 \leq \ldots \leq i_n$. (Eles parametrizam via $\psi \mapsto \mathrm{ind}_P^G(\psi)^{\mathrm{alg}}$ todas as representações algébricas irredutíveis de GL_n.)

Exemplo de Breuil e Schneider: Seja $\chi = \theta\psi$ o produto de um caráter não-ramificado e algébrico. Então a representação induzida localmente algébrica construída por Schneider e Breuil V é dada por

$$V = i(\chi)^{\mathrm{la}}.$$

Escrevemos sucintamente $i(\chi) = i(\chi)^{\mathrm{la}}$.

5 Reticulado unitário universal

Lembremo-nos de que conjeturalmente, se certas condições naturais são satisfeitas, $V = i(\chi)$ possui uma seminorma G-inv. $\|\cdot\|$ não-nula. Introduzimos o *maior* dos espaços de Banach unitários sobre V.

Definition. Seja V uma G-representação. O **completamento unitário universal** $V \to \hat{V}$ de V é a G-representação de Banach unitária tal que para todo homomorfismo de G-representações **E**-linear $V \to W$ com W uma G-representação de Banach unitária temos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr] \arrow[dr] & & W. \\ & \hat{V} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Vamos explicitar este completamento. Por isso precisamos da observação seguinte.

Interlúdio: Seminormas e Reticulados.

Definition. Seja **E** um corpo p-ádico e $\o = \o_{\mathbf{E}}$ seu anel de inteiros. Um **reticulado** num **E**-espaço vetorial V é um $\o$-modulo $\mathscr{L}$ tal que para todo $v \in V$ há $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tal que $\lambda \cdot v \in \mathscr{L}$, isto é, $\mathbf{K} \cdot \mathscr{L} = V$.

Observation. A noção de um reticulado $\mathscr{L}$ num espaço vetorial V equivale a uma seminorma $\|\cdot\|$ sobre V na seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll} \|\cdot\| & \mapsto & \mathscr{L} = B_{\leq 1}(V) = \{x \in V : \|x\| \leq 1\} \\ \mathscr{L} & \mapsto & \|\cdot\| \text{ def. por } \|v\| := \inf\{c \in |\mathbf{E}^*| : v \in \lambda\mathscr{L} \text{ com } |\lambda| = c\} \end{array}$$

Notamos que a equivalência entre uma seminorma $\|\cdot\|$ e a sua bola de unidade $B_{\leq 1}$ vale igualmente sobre $\mathbb{R}$. A diferença é que $\o = B_{\leq 1}(\mathbb{F})$ é um anel e então $\mathscr{L} = B_{\leq 1}(V)$ um reticulado.

Observações gerais

Seja, como em nosso caso, a G-representação V finitamente gerado. Tem-se a caraterização seguinte:

Observation. O espaço de Banach $\hat{V}$ é o completamento relativamente à seminorma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ associada à qualquer reticulado $\mathscr{L}$ finito gerado como $\o_{\mathbf{E}}[G]$-módulo.

Chamamos $\mathscr{L}$ do **reticulado unitário universal** da G-representação V.

Seja G um grupo compacto, V uma G-representação e $\|\cdot\|_0$ uma norma qualquer sobre V. Então a norma $\|\cdot\|$ sobre V dada por

$$\|v\| = \max\{\|v^g\|_0 : g \in G\}.$$

é G-invariante. Isto raciocino torna plausível que a forma de $\mathscr{L}$ somente depende da parte não compacta em G.

Proposition 5.1. *O reticulado unitário universal* $\mathscr{L}$ *da* G*-representação* $i(\chi)$ *é dado por qualquer reticulado finitamente gerado como* $ø_{\mathbf{E}}$[P]-modulo.

Demonstração. (Veja [?, Corollary 3.3]): Usa a *decomposição de Iwasawa*

$$G = KP$$

com $K = GL_n(ø_{\mathbb{F}})$ um subgrupo compacto aberto máximo de G.

A célula aberta padrão

Pela definição temos uma noção bem definida do suporte de uma função em $i(\chi)$ como subconjunto em $\mathscr{F} := \bar{P}\backslash G$. Podemos:

- Olhar a inclusão da **célula aberta padrão** $N \hookrightarrow \mathscr{F}$ (com imagem densa), e
- definir $i(\chi)(N) = \{f : G \to \mathbf{E}$ em $i(\chi)$ com suporte em $N\}$.

Este subespaço é estável sob a ação de P. Descrevemos no paragrafo seguinte esta P-representação em mais detalhe.

Colando as células abertas

Construímos uma família de isomorfismos *entrelaçando* da G-representação $i(\chi)$ como se segue:

- Seja $W = N_G(T)/T$ o **grupo de Weyl** das matrizes de monômios em G. Tem-se uma operação bem definida por W sobre os caracteres $\chi \colon T \to \mathbf{E}^*$ pela conjugação $\chi^w = \chi(\cdot^w)$.
- Seja $\delta_P : tn \mapsto |\mathrm{Ad}_n(t)|$ a **função modular** de $P = TN$. Tem-se im $\delta_P/\delta_P^w \subseteq p^{2\mathbb{Z}}$ e então $(\delta_P/\delta_P^w)^{1/2}$ é bem definido.
- Seja $\theta_w = \theta^w((\delta_{\bar{P}}/\delta_{\bar{P}}^w)^{1/2}$. Supomos que θ é **regular**, isto é, $\theta_w = \theta$ se e tão-somente se $w = 1$, e que $i(\chi)$ é *irredutível.*

Proposition (Operadores de entrelaçamento)**.** *Existe uma família de isomorfismos de* G*-representações*

$$\mathrm{T}_w \colon i(\chi_w) \to i(\chi) \quad \textit{com } \chi_w = \theta_w\chi \quad \textit{para todo } w \in \mathrm{W}.$$

Os operadores de entrelaçamentos T_w para $w \in \mathrm{W}$ nos permitem colar $i(\chi)$ a partir da célula aberta padrão N. Mais exatamente:

Proposition (Colagem através dos entrelaçamentos)**.** *Tem-se*

$$i(\chi) = \sum_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{T}_w(i(\chi_w)(\mathrm{N})).$$

Corollary (da Proposição acima e Proposition 5.1)**.** *O reticulado unitário universal* $\mathscr{L}$ *de* $i(\chi)$ *é da forma*

$$\mathscr{L} = \sum_{w \in \mathrm{W}} \mathscr{L}_w$$

onde $\mathscr{L}_w = \mathrm{T}_w(\mathscr{L}_w)$ *com* $\mathscr{L}_w$ *o reticulado unitário universal da* P*-representação* $i(\chi_w)(\mathrm{N})$.

$\Longrightarrow$ Vamos estudar a P-representação $i(\chi)(\mathrm{N})$ e o seu reticulado unitário universal $\mathscr{L}$.

6 A norma unitária de funções diferençáveis

Restrição à célula aberta padrão

Denotamos a operação de T por conjugação à esquerda respetivamente à direita sobre N por ${}^t n = tnt^{-1}$ respetivamente por $n^t = t^{-1}nt$.

Lemma 6.1. *Pela restrição a* N *temos uma injeção de* P*-representações*

$$i(\chi)(\mathrm{N}) \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \{f : \mathrm{N} \to \mathbf{E} : \textit{ loc. polinomial e de sup. cpt.}\}$$

se definamos o grupo P *opera sobre* $\mathscr{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ *como*

$$f^p = \chi(p) f(\cdot^t n) \quad \textit{para todos } p = tn \in \mathrm{P} \quad \textit{com } t \in \mathrm{T}, n \in \mathrm{N}.$$

Remark. Notamos que $\mathbf{N}$ é um produto de copias de $\mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[\mathrm{X}])$ e então $\mathscr{C}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \{f : \mathrm{N} \to \mathbf{E} \text{ polinomial }\}$.

Denotamos a imagem desta injeção $f \mapsto f_{|\mathrm{N}}$ por

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \{ & f : \mathrm{N} \to \mathbf{E} \text{ de suporte compacto } : \text{ Para todos} \\ & n \in \mathrm{N} \text{ há } \mathrm{U} \ni n \text{ aberto em N tal que} \\ & f_{|\mathrm{U}} = p_{|\mathrm{U}} \text{ para um } p \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\psi)^{\mathrm{alg}}\}.\end{aligned}$$

O reticulado unitário universal de $i(\chi)(\mathrm{N})$

Proposition 6.2. *Sejam*

- $\mathbf{1}_{\mathrm{N}_0}$ *a função característica de* $\mathrm{N}_0 \subseteq \mathrm{N}$, *e*
- $\bar{u}$ *o* ***vetor do peso máximo*** *único (a menos de um escalar) invariante pelo grupo* $\bar{\mathrm{P}}$ *da* G*-representação racional irredutível* $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$.

O reticulado unitário universal $\mathscr{L}$ *da* P*-representação* $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ *é*

$$\mathscr{L} = \mathrm{o}_{\mathbf{E}}[\mathrm{P}] \cdot f \quad \text{com } f = \mathbf{1}_{\mathrm{N}_0} \bar{u}_{|\mathrm{N}}.$$

Proof: Usa que ${}^t\mathrm{N}_0 \subseteq \mathrm{N}_0$ fica arbitrariamente diminuto e depois traslada por N. A parte algébrica provem da teoria de representações racionais. □

Seja T^+ o **submonoide dominante** de T dado por

$$\mathrm{T}^+ := \{\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix} : |t_1| \geq \ldots \geq |t_d|\} = \{t \in \mathrm{T} : {}^t\mathrm{N}_0 \subseteq \mathrm{N}_0\}.$$

Proposition. *O ret.* $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ *é livre* $\iff$ $|\chi(t)| \leq 1$ *para todos* $t \in \mathrm{T}^+$.

Recordemo-nos primeiro do feito importante que $\mathscr{L}$ é livre se e tão-somente se a sua seminorma associada $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ é uma norma.

Esboço da Prova da Necessariedade: Observamos que $\mathscr{L}$ é em particular estável sob a ação de P. Seja $f = 1_{{}^t\mathrm{N}_0} \otimes u_{|\mathrm{N}}$ com u o vetor do peso máximo da G-representação $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$. Tem-se $u_{|\mathrm{N}} = 1$ e $f^t = \chi(t) \cdot \mathbf{1}_{{}^t\mathrm{N}_0} \otimes u_{|\mathrm{N}}$ para $t \in \mathrm{T}$. Como $f^n = f(\cdot n)$ para $n \in \mathrm{N}$, segue

$$f = \sum_{n \in \mathrm{N}/{}^t\mathrm{N}_0} \mathbf{1}_{{}^t\mathrm{N}_0 n} = 1/\chi(t) \cdot \sum_{n \in \mathrm{N}/{}^t\mathrm{N}_0} f^{tn} \quad \text{para } t \in \mathrm{T}^+.$$

Graças a $\|f^{tn}\| = \|f\|$ para $p = tn \in \mathrm{P}$ a desigualdade triangular implica que $\|f\| \leq 1/|\chi(t)| \max_{n \in \mathrm{N}/{}^t\mathrm{N}_0} \|f^{tn}\| = 1/|\chi(t)| \|f\|$. □

Estratégia da prova da Suficiência.

Observation. O reticulado $\mathscr{L}$ é *livre* $\iff$ A seminorma assoc. $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ é uma *norma.*

$\implies$ Basta achar uma norma $\|\cdot\|$ tal que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathscr{L}}$.

Visto que $\mathscr{L} = ø_{\mathbf{E}}[\mathrm{P}] \cdot f$ com $f = \mathbf{1}_{\mathrm{N}_0} \otimes \bar{u}_{|\mathrm{N}}$, temos per def.:

$\implies$ A seminorma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ é a *maior* seminorma tal que P deixa o gerador f invariante.

Como satisfaz achar um tal norma menos de equivalência e P é um grupo, estamos reduzidos ao seguinte:

Conclusão: Basta construir uma norma $\|\cdot\|$ satisfazendo:

(A) Invariância sob translação por N.

(B) Ha um número constante $C \geq 1$ tal que

$$\|\mathbf{1}_{t\mathrm{N}_0} \otimes \bar{u}_{|\mathrm{N}}\| \leq C \cdot |1/\theta\bar{\psi}(t)| \quad \text{para todos } t \in \mathrm{T}.$$

Simplificações adicionais. Supomos que $|\chi(t)| \leq 1$ para todos $t \in \mathrm{T}^+$. O reticulado $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ so depende da valorização $|\chi|\colon \mathrm{T} \to |\mathbf{E}^*|$ e por isso constatamos as seguintes simplificações adicionais:

- A condição $|\chi(t)| \leq 1$ para todos $t \in \mathrm{T}^+$ implica em particular que $|\chi(z)| = 1$ para todos z no centro Z de G.
- Como $\theta(t) = 1$ e $|\psi(t)| = 1$ para todos $t \in \mathrm{T}_0$ podemos supor que χ é trivial sobre T_0.

Corollary. *Desde já podemos supor sem perda de generalidade que*

$$\chi\colon \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathrm{Z} \to \mathbf{E}^*.$$

O exemplo fundamental

Supomos $n = 2$, isto é, $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ e então $\mathrm{N} = \mathbb{F}$. Pela escolha de um uniformizador π de $\mathbb{F}$ obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathrm{Z} \\ n &\mapsto t_\alpha^n \qquad \text{com } t_\alpha = \begin{pmatrix} \pi & \\ & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, recordemo-nos de que $\chi = \theta\psi$ com

- um caráter não ramificado $\theta\colon \mathbb{F}^* \to \mathbf{E}^*$, e
- um caráter algébrico dominante ψ que podemos escrever na forma

$$\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \mapsto a^{k+l} b^l$$

com $k + l \geq l$ em $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.3. *Obtemos a descrição explicita*

$$\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E}) := \{f : \mathbb{F} \to \mathbf{E} : f \text{ loc. polinomial de grau } \leq k \text{ com suporte compacto}\}$$

e ação de P *dada*

- *por* $f^t = \chi(t) f(d/a \cdot \_)$ *para todo* $t = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}$, *e*
- *por* $f^n = f(\cdot + n)$ *para todo* $n \in \mathrm{N}$.

Proof: A representação algébrica irredutível $\mathrm{I}(\psi)^{\mathrm{alg}}$ de peso máximo ψ tem uma base de produtos de k fatores consistindo das funções de coordenadas a e b na reta superior e da det. Restringindo a N da as funções de monômio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X}^k \\ & 1 \end{pmatrix}$. □

Seja

$$r = v(\chi(t_\alpha)) \in \mathbb{R}$$

com v a valoração de $\mathbf{E}$ normalizada tal que $v(p) = 1$.

- Recordemo-nos de que $|\chi|\colon \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathbb{Z} \to |\mathbf{E}^*|$ com $\mathbb{Z} = \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathrm{Z}$ e o reticulado $\mathscr{L}$ em $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ somente depende de $|\chi|$, obtemos que r determina $\mathscr{L}$ respectivamente $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$.
- Pelo suposto $|\chi(t)| \leq 1$ para todos $t \in \mathrm{T}^+$ obtemos $r \geq 0$.

Visto

- a descrição explicita de $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ na Proposition 6.3 prévia,
- que $\chi\colon \mathrm{T} \to \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathrm{Z} \to \mathbf{E}^*$ e $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}/\mathrm{T}_0\mathrm{Z}$ via $n \mapsto t_\alpha^n$,

as propriedades (A) e (B) acima da norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ associada a $\mathscr{L}$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ se traduzem como se segue.

Basta construir $\|\cdot\|$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ satisfazendo:

(a) Ha um número constante $C > 0$ tal que

$$\|1_{\pi^n \o_{\mathbb{F}}} x^k\| \le C \cdot |\pi|^{(k-r)n} \quad \text{para todos } n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Ela é invariante sob translação.

Para não nos perder em tecnicidades, supomos aqui que $r = 1$.

Funções diferençáveis.

Definition. Seja $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{lp}\le k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$. Definamos a função $f^{]1[}$ por

$$f^{]1[}(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{F} \text{ diferentes.}$$

Como funções localmente polinomiais são em particular diferençáveis, mostra-se facilmente que

$$\|f^{]1[}\|_{\sup} = \sup\{|f^{]1[}(x,y)| : x, y \in \mathbb{F}\} < \infty.$$

Definition. A norma $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$ é definida sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}\le k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ por

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f^{]1[}\|_{\sup}.$$

Proposition. *A norma $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$ satisfaz as Propriedades (a) e (b) acima.*

Proof: Ad (a): Pois o supremo de $\|f^{]1[}\|_{\sup}$ concorre todos pares de elementos diferentes em N, ele não muda sob translação por N.

Ad (b): Mostramos que

$$\|1_{\pi^n \o_{\mathbb{F}}} x^k\|_{\mathscr{C}^1} \le |\pi|^{(k-1)(n-1)} = C \cdot |\pi|^{(k-1)n}$$

com $C = 1/|\pi|^n > 0$ para todos $n \in \mathbb{Z}$. Colocamos $U = \pi^n \o_{\mathbb{F}}$ e $\delta = \mathrm{dia}(U) = |\pi^n|$. Distinguimos dois casos:

(i) Tem-se $|x - y| \le \delta$. Distinguimos dois casos:
   (a) Tem-se $|x| \le \delta$: Então $f^{]1[}(x,y)$ é um polinomial de grau total $k - 1$ em x, y com $|x|, |y| \le \delta$ e por isso $|f^{]1[}(x,y)| \le \delta^{k-1}$.
   (b) Tem-se $|x| > \delta$: Então $f(x) = f(y) = 0$ e $f^{]1[}(x,y) = 0$.

(ii) Tem-se $|x - y| > \delta$. Então $|f^{]1[}(x,y)| < \delta^{-1}\|f\|_{\sup} \le \delta^{-1}\delta^k = \delta^{k-1}$. □

Caso geral

Restamos no caso $n = 2$, isto é, no caso de uma variável $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$. Seja $r \geq 0$ um número real qualquer.

Definition. Seja $i \geq 0$ e $h_1, .., h_i, h_{i+1} \in \mathbb{F}$. Def. o operador de quociente de diferença iterado $\Delta^i\_(\cdot; h_1, .., h_i)$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ por $\Delta^0 f = f$ e

$$\Delta^{i+1} f(\cdot; h_1, .., h_i, h_{i+1}) = \Delta^i f(\cdot + h_{i+1}; h_1, .., h_i) - \Delta^i f(\cdot; h_1, .., h_i).$$

Definition. Escrevemos $r = \nu + \rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ com $\nu \in \mathbb{N}$ e $\rho \in [0, 1[$. Definimos a norma $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^r}$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ por

$$\|f\|_{\mathscr{C}^r} = \sup_{x \in \mathbb{F}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{F}^{*\nu+1}} \frac{|\Delta^{\nu+1} f(x; \boldsymbol{h})|}{|h_1| \cdots |h_{\nu_k}| \cdot |h_{\nu_k+1}|^{\rho}}.$$

Supomos agora $n \geq 2$ qualquer.

Definition. Seja $\boldsymbol{h} = ({}^1\boldsymbol{h}; \ldots; {}^d\boldsymbol{h}) \in \mathbb{F}^{i_1} \times \cdots \times \mathbb{F}^{i_d}$. Definamos o operador de quociente de diferença iterado em múltiplas variáveis $\Delta^{\boldsymbol{i}}\_(\cdot; \boldsymbol{h})$ sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{F}, \mathbf{E}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{F}, \mathbf{E})$ por

$$\Delta^{\boldsymbol{i}}\_(\cdot; \boldsymbol{h}) = \Delta^{i_1}\_(\cdot; {}^1\boldsymbol{h}) \otimes \cdots \otimes \Delta^{i_d}\_(\cdot; {}^d\boldsymbol{h}).$$

Definition. Seja $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ com $d \in \mathbb{N}$. Escrevemos $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\rho}$ com parte inteira $\nu \in \mathbb{N}^d$ e parte fracionária $\rho \in [0, 1[^d$. Definamos

$$\|f\|_{\mathscr{C}^r} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{F}^d, \\ \boldsymbol{h} \in \mathbb{F}^{*\nu_1+1} \times \cdots \times \mathbb{F}^{*\nu_d+1}}} \frac{|\Delta^{\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1}} f(x; \boldsymbol{h})|}{\prod_{k=1,\ldots,d} (|{}^k h_1| \cdots |{}^k h_{\nu_k}| \cdot |{}^k h_{\nu_k+1}|^{\rho_k})};$$

aqui $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$.

- Lembremo-nos de que, como variedade algébrica, $\mathbf{N} \simeq \mathbf{A}^{\Phi^+}$ com $\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i < j \in \{1, \ldots, n\}\}$ as raízes positivas de $\mathbf{G}$. (Aqui $\varepsilon_i \colon \mathrm{T} \to \mathbb{F}^*$ a função avaliando a coordenada i do toro.)
- Então $\mathscr{C}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \{f \colon \mathrm{N} \to \mathbf{E} \text{ polinomial }\}$ e por conseguinte

$$\mathscr{C}^{\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}) = \{f \colon \mathrm{N} \to \mathbf{E} \text{ loc. polinomial com sup. compacto }\}.$$

Conclusão: Tem-se uma identificação natural

$$\iota\colon \bigotimes_{\alpha\in\Phi^+} \mathscr{C}^{\mathrm{lp}}(\mathbb{F}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{la}}(\mathrm{N}, \mathbf{E}).$$

Definamos $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Phi^+}$ como se segue: Tem-se um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^{\Delta} &\to \mathrm{T}^+/\mathrm{T}_0\mathrm{Z} \\ (n_\alpha) &\mapsto \prod_{\alpha\in\Delta} t_\alpha \end{aligned}$$

com $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}\}$ as raízes simples.

Definition. Definamos $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Phi^+}$ por

$$r_\alpha := \begin{cases} v(\chi(t_\alpha)) & \text{se } \alpha \in \Delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definition. Fornecemos $\mathscr{C}^{\mathrm{la}-\psi}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ com a norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|f\| = \|\iota^{-1}(f)\|_{\mathscr{C}^{\boldsymbol{r}}}.$$

Proposition (Lema 3.5 em [Nag16]). *A norma* $\|\cdot\|$ *satisfaz as Propriedades (A) e (B) acima.*

7 Conclusão

Resumo

- Construímos a G-representação localmente algébrica

$$i(\chi) = \{\text{certas funções } f\colon \mathrm{G} \to \mathbf{E} \text{ localmente algébricas }\}.$$

- Obtivemos que a sua seminorma unitária *máxima* $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ é dado pelo reticulado

$$\mathscr{L} = \sum_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{T}_w(\mathscr{L}_w)$$

  com $\mathscr{L}_w \subseteq i(\chi_w)(\mathrm{N}) = \{$ todas $f \in i(\chi_w)$ suportadas em N$\}$ e certos isomorfismos $\mathrm{T}_w\colon i(\chi_w) \to i(\chi)$ para todos $w \in \mathrm{W}$.

- Via $f \mapsto f_{|\mathrm{N}}$ observamos que $i(\chi)(\mathrm{N}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\psi-\mathrm{alg}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}, \mathbf{E})$ se descreve como certas funções localmente polinomiais.

- Mostramos que $\mathscr{L}_w$ é livre se, e só se, $|\chi_w(t)| \leq 1$ para todos $t \in \mathrm{T}^+$ pela construção de uma norma $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^{\boldsymbol{r}}} \leq \|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ de certas funções $\boldsymbol{r}$-vezes diferençáveis para $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{\Phi^+}_{\geq 0}$.

Conclusão

Corollary. *Supomos que para todo $w \in \mathrm{W}$ vale $|\chi_w(t)| \leq 1$ para todos $t \in \mathrm{T}^+$. Então o reticulado unitário universal $\mathscr{L}$ da G-representação $i(\chi)$ é da forma*

$$\mathscr{L} = \sum_{w \in \mathrm{W}} \mathscr{L}_w \quad \textit{com } \mathscr{L}_w \textit{ livre.}$$

- Isto ainda não mostra diretamente que $\mathscr{L}$ mesmo é livre.

- Até agora somente o caso $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ é resolvido em geral por Berger e Breuil em [BB10]. A sua demonstração curiosamente enrola ao lado da representações de Galois usando a Correspondência de Langlands estabelecida para $n = 2$ e $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$.

Esperamos que esta estratégia ajuda resolver o caso mais geral através um raciocínio mais direta.

References

[BB10] L. Berger and C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[BS07] C. Breuil and P. Schneider, *First steps towards p-adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 149–180. MR 2359853. DOI 10.1515/CRELLE.2007.070.

[Nag11] E. Nagel, *Fractional non-Archimedean differentiability*, Univ. Münster, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät (Diss.), 2011. zbMATH 1223.26011. Confer `http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6-75409405856`.

[Nag16] ———, *Fractional differentiability and unitarity on parabolic inductions*, Advances in non-Archimedean analysis, Contemp. Math., vol. 665, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 177–197. MR 3509807. DOI 10.1090/conm/665/13306. Confer https://konfekt.bitbucket.io/publications/crOpenCell.pdf.