[1]

Reticulados de dimensão infinita em Representações p-ádicas localmente algébricas

Enno Nagel,
UFAL, Maceió
http://www.math.jussieu.fr/˜nagel

23 de novembro de 2012

[1] Agradeço ao André Luís Contiero as correções de uma primeira versão deste trabalho.

Interlúdio: Números p-ádicos

Seja p um número primo. A valorização p-ádico $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Z}$ mede quantas vezes p aparece na fatoração de um número inteiro.

Definição

Seja $|a|_p = 1/p^e \quad$ se $a = a'p^e$ com p não dividindo a'.

Ela estende-se multiplicativamente aos números racionais $\mathbb{Q}$. Conforme a $\mathbb{R}$, consistindo de todos os limites em $\mathbb{Q}$ relativamente à valorização $|\cdot|$, declaramos analogamente:

Definição

Os **números p-ádicos** $\mathbb{Q}_p$ são o completamento de $\mathbb{Q}$ relativamente à valorização $|\cdot|_p$.

Analogamente têm uma *expansão p-ádica* e se escrevem

$$\sum_{i>>-\infty} a_i p^i \quad \text{com } a_i \in \{0, \ldots, p-1\}.$$

Programa de Langlands p-ádico

Seja $\mathbf{F}$ um corpo p-ádico, isto é, uma extensão finita de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbf{E}$ uma extensão finita (bastante grande) de $\mathbf{F}$. Vamos estudar ações de grupos com coeficientes em $\mathbf{F}$ (o *corpo do grupo*) sobre espaços vetoriais sobre $\mathbf{E}$ (o *corpo de coeficientes*).

Definição

Uma **representação de Galois p-ádica** é uma ação continua do grupo $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}/\mathbf{F})$ sobre um $\mathbf{E}$-espaço vet. de dimensão finita.

Definição

Seja $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ para um número natural n. Uma **G-representação de Banach unitária** é uma ação do grupo G sobre um $\mathbf{E}$-espaço de Banach V tal que a topologia deste pode ser definido por uma norma G-invariante. (I. é $\|v^g\| = \|v\|$ para todos $v \in V$ e $g \in G$.)

O programa de Langlands p-ádico

Vagamente, procura uma bijeção *natural* (a precisar) $\rho \mapsto \Pi(\rho)$ entre as categorias seguintes:

$$\{\text{representações } p\text{-ádicas de } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}/\mathbf{F}) \text{ de dimensão } n\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{\text{representações de Banach unitárias de } \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})\}.$$

- Se $n = 2$ e $\mathbf{F} = \mathbb{Q}_p$ esta conjetura tem um sentido preciso, a bijeção é mesmo funtorial, e foi verificada por Colmez, Berger, Breuil e outros.
- Em todos os outros casos, seja $n > 2$ ou $\mathbf{F} \supset \mathbb{Q}_p$ sabemos praticamente nada.

Galois cristalino e Localmente Algébrico

Em [Breuil and Schneider(2007)] os autores associam a uma certa família de representações de Galois *cristalinas* $\{\rho\}$ uma certa G-representação *localmente algébrica* V, i. é

$$\{\rho\} \mapsto V = \text{ representação localmente algébrica } .$$

Conjetura de Breuil e Schneider

Se certas condições necessárias naturais são satisfeitas, então V permita um completamento unitário $V \hookrightarrow \hat{V}$ não nulo.

A vaga esperança é que todas as representações de Banach unitárias $\Pi(\rho)$ correspondentes fatoram através de $\hat{V}$, i. é

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[dr, mapsto] & & \Pi(\rho) \\
\vdots & \hat{V} \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\
\rho \arrow[ur, mapsto] & & \Pi(\rho)
\end{tikzcd}$$

Meta

No que se segue, gostaria de

- introduzir a noção de uma representação *localmente algébrica*,
- apresentar a representação localmente algébrica V construída por Schneider e Breuil, e
- motivar porque V é com razão conjurado de ter um completamento unitário $\hat{V}$ não nulo.

Notação

Sejam o corpo do grupo $\mathbf{F}$ respectivamente de coeficientes $\mathbf{E}$ e $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ como previamente.

Subgrupos importantes em G (Veja Quadro!)

- Seja $T \subseteq G$ o toro em G, i.é o subgrupo de matrizas diagonais com valores em $\mathbf{F}^*$ e $T_0 \subseteq T$ seu subgrupo aberto maximal compacto com valores $\mathbf{o}_{\mathbf{F}}^*$, as unidades do anel dos inteiros $\mathbf{o}_{\mathbf{F}}$ de $\mathbf{F}$.
- Seja P respectivamente $\bar{P}$ o subgrupo de matrizas triangulares superiores respectivamente inferiores em G, e
- N respectivamente $\bar{N}$ o subgrupo de P respectivamente $\bar{P}$ de matrizes cujos valores diagonais equivalem 1. Seja $N_0 \subseteq N$ o subgrupo compacto aberto com valores em $\mathbf{o}_{\mathbf{F}}$.

Denotamos a operação de T por conjugação a esquerda resp. a direita sobre N por ${}^t n = tnt^{-1}$ resp. por $n^t = t^{-1}nt$.

Indução de uma Representação

O método mais evidente para construir representações sobre um corpo p-ádico $\mathbf{E}$ desse grupo é o seguinte: Pegamos

- Copias de grupos menores $T_1 = \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbf{F})$,..., $T_d = \mathrm{GL}_{n_d}(\mathbf{F})$ com $n_1 + \cdots + n_d = n$, e
- Representações $\mathbf{E}$-lineares $\chi_1, \ldots, \chi_d$ delas.

Seja $T = T_1 \times \cdots \times T_d \subseteq G$ o produto delas e escrevemos $\chi = \chi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_d$ para a representação de T associada pelo produto tensioral destas.

Definição

A G-representação $\mathbf{E}$-linear, ou igualmente o $\mathbf{E}[G]$-modulo, **induzida** $\mathrm{ind}_T^G \chi$ do $\mathbf{E}[T]$-modulo χ ao grupo G é definida como o $\mathbf{E}[G]$-modulo

$$\mathrm{ind}_T^G \chi = \chi \otimes_{\mathbf{E}[T]} \mathbf{E}[G].$$

O Exemplo mais elementar

- Sejam $n_1 = \ldots = n_d = 1$, i. é $T_1 = \ldots = T_d = \mathbf{F}^*$, e
- $\chi_1, \ldots, \chi_d : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$ caráteres.

Obtemos $\chi : T \to \mathbf{E}^*$. Como $\mathbf{F}^*$ é abeliano e $T = P^{\mathrm{ab}}$ (= quociente ab. max.), segue que χ se estende unicamente através da projeção natural $P \to T$ ao caráter $\chi : P \to \mathbf{E}^*$.

Descrição explicita (Veja Quadro!)

A G-representação induzida se descreve explicitamente como

$$\mathrm{ind}_P^G \chi = \{f : G \to \mathbf{E} : f(\bar{p}g) = \chi(\bar{p}) \cdot f(g) \text{ para } \bar{p} \in \bar{P}, g \in G\},$$

onde G opera pela translação a direita notada por $f^g := f(\cdot g)$.

Escrevemos de agora em diante sucintamente $i(\chi)$ para $\mathrm{ind}_P^G \chi$.

Liso, algébrico e localmente algébrico

Além da estrutura de grupo G tem duas propriedades adicionais:

- A sua topologia totalmente desconexa herdada do corpo $\mathbf{F}$, e
- a sua estrutura de variedade algébrica.

Definição

Seja V uma G-representação. Um vetor v em V é **liso** resp. **algébrico** resp. **localmente algébrico** se sua órbita

$$\begin{aligned} o_v : G &\to V \\ g &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

é um mapa **localmente constante** resp. **racional** resp. **localmente racional**.

Anotamos que o_v é **localmente algébrico** se ha um espaço da dimensão finita $V_0 \subseteq V$ e um grupo aberto $G_0 \subseteq G$ tais que $o_v : G_0 \to V_0$ é (a restrição de) um mapeamento algébrico.

Definição

Denotamos com $i(\chi)^{\mathrm{lc}}$ respectivamente $i(\chi)^{\mathrm{alg}}$ respectivamente $i(\chi)^{\mathrm{la}}$ a G-subrepresentação dada por todos vetores *lisas* respectivamente *algébricos* respectivamente *localmente algébricos* em $i(\chi)$.

Visto que G opera pelas translações temos explicitamente que

- $i(\chi)^{\mathrm{lc}}$ consisti das funções localmente constantes,
- $i(\chi)^{\mathrm{alg}}$ nas funções algébricas de G, i. é das funciones polinomiais nas coordenadas $\{X_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ de G e a sua determinante $\det(X_{11}, \dots, X_{nn})$, e
- $i(\chi)^{\mathrm{la}}$ das funções sobre G que se restringem localmente a uma função algébrica dessas.

A representação V de Breuil e Schneider

- Um caráter $\theta : T \to \mathbf{E}^*$ é **não-ramificado** se ele é trivial sobre $T_0 \subseteq T$ (e então fatorando através do quociente $T/T_0 = \mathbb{Z}^n$ deles).
- Um caráter algébrico $\psi : T \to \mathbf{F}^*$ é **dominante** se ele é da forma $(t_1, \ldots, t_n) \to t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$ onde as potencias satisfazem $i_1 \leq \ldots \leq i_n$. (Eles parametrizam via $\psi \mapsto \operatorname{ind}_P^G(\psi)^{\mathrm{alg}}$ todas as representações algébricas irredutíveis de GL_n.)

Exemplo de Breuil e Schneider

Seja $\chi = \theta\psi$ o produto de um caráter não-ramificado e algébrico. Então a representação induzida localmente algébrica construída por Schneider e Breuil V é dada por

$$V = i(\chi)^{\mathrm{la}}.$$

Escrevemos sucintamente $i(\chi) = i(\chi)^{\mathrm{la}}$.

Interlúdio: Seminormas e Reticulados

Definição

Seja $\mathbf{E}$ um corpo p-ádico e $\mathbf{o} = \mathbf{o}_{\mathbf{E}}$ seu anel de inteiros. Um **reticulado** num $\mathbf{E}$-espaço vetorial V é um $\mathbf{o}$-modulo $\mathcal{L}$ tal que para todo $v \in V$ ha $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tal que $\lambda \cdot v \in \mathcal{L}$, i. é $\mathbf{K} \cdot \mathcal{L} = V$.

Observação

A noção de um reticulo $\mathcal{L}$ num espaço vetorial V equivale a uma seminorma $\|\cdot\|$ sobre V na seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll} \|\cdot\| & \mapsto & \mathcal{L} = \mathrm{B}_{\leq 1}(V) = \{x \in V : \|x\| \leq 1\} \\ \mathcal{L} & \mapsto & \|\cdot\| \text{ def. por } \|v\| := \inf\{c \in |\mathbf{E}^*| : v \in \lambda\mathcal{L} \text{ com } |\lambda| = c\} \end{array}$$

Notamos que a equivalência entre uma seminorma $\|\cdot\|$ e a sua bola de unidade $\mathrm{B}_{\leq 1}$ vale igualmente sobre $\mathbb{R}$. A diferença é que $\mathbf{o} = \mathrm{B}_{\leq 1}(\mathbf{F})$ é um anel e então $\mathcal{L} = \mathrm{B}_{\leq 1}(V)$ um reticulado.

Observações gerais

Lembramos que conjeturalmente, se certas condições naturais são satisfeitas, $V = i(\chi)$ possui uma seminorma G-inv. $\|\cdot\|$ não nula. Introduzimos o *maior* dos espaços de Banach unitários sobre V.

Definição

Seja V uma G-representação. O **completamento unitário universal** $V \to \hat{V}$ de V é a G-representação de Banach unitária tal que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr] \arrow[dr] & & W \\ & \hat{V} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

para todo morfismo de G-representações $\mathbf{E}$-linear $V \to W$ com W uma G-representação de Banach unitária.

Observação

O espaço de Banach $\hat{V}$ é o completamento rel. à seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ assoc. à qualquer reticulado $\mathcal{L}$ finit. gerado como $\mathbf{o_E}[G]$-módulo.

Chamamos $\mathcal{L}$ do **reticulado unitário universal** da G-rep. V.
Seja G um grupo compacto, V uma G-representação e $\|\cdot\|_0$ uma norma qualquer sobre V. Então a norma $\|\cdot\|$ sobre V dada por

$$\|v\| = \max\{\|v^g\|_0 : g \in G\}.$$

é G-invariante. Isto raciocino torna plausível que a forma de $\mathcal{L}$ somente depende da parte não compacta em G.

Proposição 2.1

O reticulado unitário universal $\mathcal{L}$ da G-representação $i(\chi)$ é dado por qualquer reticulado finitamente gerado como $\mathbf{o_E}[P]$-modulo.

Demonstração. (Veja [Nagel(2012), Corollary 3.3])

Usa a *decomposição de Iwasawa*

$$G = KP$$

com $K = \mathrm{GL}_n(\mathbf{o_F})$ um subgrupo max. compacto aberto de G.

A célula aberta padrão

Per definitionem temos uma noção bem definida do suporte de uma função em $i(\chi)$ como subconjunto em $\mathcal{F} := \bar{P}\backslash G$. Podemos:

- Olhar a inclusão da **célula aberta padrão** $N \hookrightarrow \mathcal{F}$ (com imagem densa), e
- definir $i(\chi)(N) = \{f : G \to \mathbf{E}$ em $i(\chi)$ com suporte em $N\}$.

Este subespaço é estável sob a ação de P. Mais exatamente:

Lema 2.2

Pela restrição a N temos uma injeção de P-representações

$$i(\chi)(N) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E}) = \{f : N \to \mathbf{E} : \text{ loc. alg. e de sup. cpt.}\}$$

se definamos o grupo P opera sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ como

$$f^p = \chi(p) f(\cdot\, {}^t n) \quad \text{para todos } p = tn \in P \text{ com } t \in T, n \in N.$$

Colando as células abertas

Construímos uma familia de isomorfismos de *entrelaçamento* da G-representação $i(\chi)$ como se segue:

- Seja $W = N_G(T)/T$ o **grupo de Weyl** das matrizes de monômios em G. Temos uma operação bem definida por W sobre os caráteres $\chi : T \to \mathbf{E}^*$ pela conjugação $\chi^w = \chi(\cdot^w)$.
- Seja $\delta_P : tn \mapsto |\mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}}(t)|$ a **função modular** de $P = TN$. Temos $\mathrm{im}\, \delta_P/\delta_P^w \subseteq p^{2\mathbb{Z}}$ e então $(\delta_P/\delta_P^w)^{1/2}$ é bem definido.
- Seja $\theta_w = \theta^w((\delta_{\bar{P}}/\delta_{\bar{P}}^w)^{1/2}$. Supomos que θ é **regular**, i. é $\theta_w = \theta$ se e somente se $w = 1$, e que $i(\chi)$ é *irredutível.*

Proposição (Operadores de entrelaçamento)

Existi uma familia de isomorfismos de G-representações

$$T_w : i(\chi_w) \to i(\chi) \quad \text{com } \chi_w = \theta_w \chi \quad \text{para todo } w \in W.$$

Os operadores de entrelaçamentos T_w para $w \in W$ nos permitem colar $i(\chi)$ a partir da célula aberta padrão N. Mais exatamente:

Proposição (Colagem através dos entrelaçamentos (V.Q.!))

Temos

$$i(\chi) = \sum_{w \in W} T_w(i(\chi_w)(N)).$$

Corolário (da Proposição acima e Proposição 2.1)

O reticulado unitário universal $\mathcal{L}$ de $i(\chi)$ é da forma

$$\mathcal{L} = \sum_{w \in W} \mathcal{L}_w$$

onde $\mathcal{L}_w = T_w(\mathcal{L})$ com $\mathcal{L}$ o reticulado unitário universal da P-representação $i(\chi)(N)$.

$\Rightarrow$ Vamos estudar a P-representação $i(\chi)(N)$ e o seu reticulado unitário universal $\mathcal{L}$.

0 Motivação: Representações de Banach unitárias

1 Representações localmente algébricas

2 Reticulado unitário universal

3 A norma unitária de funções diferenciáveis
- Restrição à célula aberta padrão
- O reticulado unitário universal de $i(\chi)(N)$
- O exemplo fundamental
- Caso geral

Restrição à célula aberta padrão

Em Lema 2.2 vimos que pela restrição $f \mapsto f_{|N}$ temos uma injeção de P-representações

$$i(\chi)(N) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$$

onde o grupo P opera sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ como

$$f^p = \chi(p) f(\cdot {}^t n) \quad \text{para todos } p = tn \in P \text{ com } t \in T, n \in N.$$

Denotamos a imagem desta injeção $f \mapsto f_{|N}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E}) = & \{ f : N \to \mathbf{E} \text{ de suporte compacto } : \text{ Para todos} \\ & n \in N \text{ ha } U \ni n \text{ aberto em } N \text{ tal que} \\ & f_{|U} = p_{|U} \text{ para um } p \in \mathrm{Ind}_P^G(\psi)^{\mathrm{alg}} \}. \end{aligned}$$

Resumamos estas observações.

Proposição

A restrição $f \mapsto f_{|N}$ induzi um isomorfismo de $\mathbf{E}[P]$-módulos

$$i(\chi)(N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$$

entre $i(\chi)(N)$ e um espaço de certas funções localmente polinomiais $f : N \to \mathbf{E}$ de suporte compacto com P-ação dada por

$$f^p = \chi(p) f(\cdot^t n) \quad \text{para todos } p = tn \in P \ \text{ com } t \in T, n \in N.$$

Demonstração.

Neste momento basta ver que $\mathbf{N}$ é um produto de copias de $\mathbf{A}_1 = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}[X])$ e então $\mathcal{C}^{\mathrm{alg}}(N, \mathbf{E}) = \{f : N \to \mathbf{E} \text{ polinomial }\}$. ∎

O reticulado unitário universal de $i(\chi)(N)$

Proposição 3.1

- *Seja* $\mathbf{1}_{N_0}$ *a função característica de* $N_0 \subseteq N$, *e*
- *seja* $\bar{u}$ *o* ***vetor do peso maximal*** *único (a menos de um escalar) invariante pelo grupo* $\bar{P}$ *da* G*-representação racional irredutível* $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$.

O reticulado unitário universal $\mathcal{L}$ *da* P*-rep.* $\mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ *é*

$$\mathcal{L} = \mathbf{o_E}[P] \cdot f \quad \text{com } f = \mathbf{1}_{N_0} \bar{u}_{|N}.$$

Demonstração.

Usa que ${}^{t}N_0 \subseteq N_0$ fica arbitrariamente diminuto, depois translata por N. A parte algébrica provem da teoria de rep. racionais. ■

Seja T^+ o **submonoide dominante** de T dado por

$$T^+ := \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d \end{pmatrix} : |t_1| \geq \ldots \geq |t_d| \right\} = \{ t \in T : {}^t N_0 \subseteq N_0 \}.$$

Proposição

O ret. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ *é livre* $\Leftrightarrow |\chi(t)| \leq 1$ *para todos* $t \in T^+$.

Esboço da Prova da Necessariedade.

De $f^t = \chi(t) \cdot \mathbf{1}_{{}^t N_0} \otimes \bar{u}_{|N}$ por $t \in T$ e $f^n = f(\cdot n)$ por $n \in N$ segue

$$f = \sum_{n \in N / {}^t N_0} 1_{{}^t N_0 n} \otimes \bar{u}_{|N} = 1/\chi(t) \cdot \sum_{n \in N / {}^t N_0} f^{tn} \quad \text{para } t \in T^+.$$

Graças a $\|f^{tn}\| = \|f\|$ para $p = tn \in P$ a desigualdade triangular implica que $\|f\| \leq 1/|\chi(t)| \max_{n \in N / {}^t N_0} \|f^{tn}\| = 1/|\chi(t)| \|f\|$. ∎

Estratégia da prova da Suficiência

Observação

O reticulado $\mathcal{L}$ é *livre* $\Leftrightarrow$ A seminorma assoc. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ é uma *norma*.

$\Rightarrow$ Basta achar uma norma $\|\cdot\|$ tal que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.
Visto que $\mathcal{L} = \mathbf{o_E}[P] \cdot f$ com $f = \mathbf{1}_{N_0} \otimes \bar{u}_{|N}$, temos per def.:
$\Rightarrow$ A seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ é a *maior* seminorma tal que P deixa o gerador f invariante.

Conclusão

Basta construir uma norma $\|\cdot\|$ satisfazendo:

(A) Invariância sob translação por N.

(B) Ha um número constante $C \geq 1$ tal que

$$\|\mathbf{1}_{tN_0} \otimes \bar{u}_{|N}\| \leq C \cdot |1/\theta\bar{\psi}(t)| \quad \text{para todos } t \in T.$$

Simplificações adicionais

Supomos que $|\chi(t)| \leq 1$ para todos $t \in T^+$. O reticulado $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ so depende da valorização $|\chi| : T \to |\mathbf{E}^*|$ e por isso constatamos as seguintes simplificações adicionais:

- A condição $|\chi(t)| \leq 1$ para todos $t \in T^+$ implica em particular que $|\chi(z)| = 1$ para todos z no centro Z de G.
- Como $\theta(t) = 1$ e $|\psi(t)| = 1$ para todos $t \in T_0$ podemos supor que χ é trivial sobre T_0.

Corolário

Desde já podemos supor sem perda de generalidade que

$$\chi : T/T_0 Z \to \mathbf{E}^*.$$

O exemplo fundamental

Supomos $n = 2$, i. é $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ e então $N = \mathbf{F}$. Pela escolha de um uniformizador π de $\mathbf{F}$ obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} T/T_0 Z \\ n &\mapsto t_\alpha^n \qquad \text{com } t_\alpha = \begin{pmatrix} \pi & \\ & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, recordamos que $\chi = \theta\psi$ com

- um caráter não ramificado $\theta : \mathbf{F}^* \to \mathbf{E}^*$, e
- um caráter algébrico dominante ψ que podemos escrever na forma
$$\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^{k+l} b^l$$
com $k + l \geq l$ em $\mathbb{Z}$.

Proposição 3.2

Obtemos a descrição explicita

$$\mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}(N, \mathbf{E}) = \mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) := \{f : \mathbf{F} \to \mathbf{E} : f \text{ loc. pol. de grau } \leq k \text{ com suporte compacto}\}$$

e ação de P dada

- *por $f^t = \chi(t) f(d/a \cdot \_)$ para todo $t = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \in T$, e*
- *por $f^n = f(\cdot + n)$ para todo $n \in N$.*

Demonstração.

A representação algébrica irredutível $I(\psi)^{\mathrm{alg}}$ de peso maximal ψ tem uma base de produtos de k fatores consistindo das funções de coordenadas a e b na linha superior e da det. Restringindo a N da as funções de monômio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\begin{pmatrix} 1 & X^k \\ & 1 \end{pmatrix}$. ∎

Seja

$$r = v(\chi(t_\alpha)) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

com v a valoração de $\mathbf{E}$ normalizada tal que $v(p) = 1$. **Supomos aqui que** $r = 1$. Visto

- a descrição explicita de $\mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}(N, \mathbf{E})$ na Prop. 3.2 prévia,
- que $\chi : T \to T/T_0 Z \to \mathbf{E}^*$ e $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} T/T_0 Z$ via $n \mapsto t_\alpha^n$,

as propriedades (A) e (B) acima da norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ associada a $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ se traduzem como se segue.

Basta construir $\|\cdot\|$ sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ satisfazendo:

(a) Ha um número constante $C > 0$ tal que

$$\|1_{\pi^n \mathbf{o_F}} x^k\| \leq C \cdot |\pi|^{(k-1)n} \quad \text{para todos } n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Ela é invariante sob translação.

Funções diferenciáveis

Definição

Seja $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$. Definamos a função $f^{]1[}$ por

$$f^{]1[}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{para todos } x, y \in \mathbf{F} \text{ diferentes.}$$

Como funções localmente polinomiais são em particular diferenciáveis, mostra-se facilmente que

$$\|f^{]1[}\|_{\sup} = \sup\{|f^{]1[}(x, y)| : x, y \in \mathbf{F}\} < \infty.$$

Definição

A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ é definida sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ por

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f^{]1[}\|_{\sup}.$$

Proposição

A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ satisfaz as Propriedades (a) e (b) acima.

Demonstração.

Ad (b): Mostramos que

$$\|1_{\pi^n \mathbf{O_F}} x^k\|_{\mathcal{C}^1} \leq |\pi|^{(k-1)(n-1)} = C \cdot |\pi|^{(k-1)n}$$

com $C = |\pi|^n > 0$ para todos $n \in \mathbb{Z}$. Colocamos $U = \pi^n \mathbf{O_F}$ e $\delta = \delta(U) = |\pi^n|$. Distinguimos dois casos:

1. Temos $|x - y| \leq \delta$: Distinguimos dois casos:
   1.1 Temos $|x| \leq \delta$: Então $f^{]1[}(x, y)$ é um polinomial de grau total $k - 1$ em x, y com $|x|, |y| \leq \delta$ e por isso $|f^{]1[}(x, y)| \leq \delta^{k-1}$.
   1.2 Temos $|x| > \delta$: Então $f(x) = f(y) = 0$ e $f^{]1[}(x, y) = 0$.
2. Temos $|x - y| > \delta$. Então $|x|$ ou $|y| > \delta$. Supomos $|x| > \delta$. Então $|f^{]1[}(x, y)| < \delta^{-1} \|f\|_{\sup} \leq \delta^{-1} \delta^k = \delta^{k-1}$.

∎

Caso geral

Restamos no caso $n = 2$, i. é no caso de uma variável $\mathcal{C}^{\psi-\mathrm{la}}(N, \mathbf{E}) = \mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$. Seja $r \geq 0$ um número real qualquer.

Definição

Seja $i \geq 0$ e $h_1, .., h_i, h_{i+1} \in \mathbf{F}$. Def. o operador de quociente de diferença iterado $\Delta^i{}_{-}(\cdot; h_1, .., h_i)$ sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ por $\Delta^0 f = f$ e

$$\Delta^{i+1} f(\cdot; h_1, .., h_i, h_{i+1}) = \Delta^i f(\cdot + h_{i+1}; h_1, .., h_i) - \Delta^i f(\cdot; h_1, .., h_i).$$

Definição

Escrevemos $r = \nu + \rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ com $\nu \in \mathbb{N}$ e $\rho \in [0, 1[$. Definimos a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^r}$ sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}\leq k}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ por

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sup_{x \in \mathbf{F}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{F}^{*\,\nu+1}} \frac{|\Delta^{\nu+1} f(x; \boldsymbol{h})|}{|h_1| \cdots |h_{\nu_k}| \cdot |h_{\nu_k+1}|^{\rho}}.$$

Supomos agora $n \geq 2$ qualquer.

Definição

Seja $\boldsymbol{h} = ({}^1\boldsymbol{h}; \ldots ; {}^d\boldsymbol{h}) \in \mathbf{F}^{i_1} \times \cdots \times \mathbf{F}^{i_d}$. Definamos o operador de quociente de diferença iterado em múltiplas variáveis $\Delta^{\boldsymbol{i}}{}_{-}(\cdot; \boldsymbol{h})$ sobre $\mathcal{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ por

$$\Delta^{\boldsymbol{i}}{}_{-}(\cdot; \boldsymbol{h}) = \Delta^{i_1}{}_{-}(\cdot; {}^1\boldsymbol{h}) \otimes \cdots \otimes \Delta^{i_d}{}_{-}(\cdot; {}^d\boldsymbol{h}).$$

Definição

Seja $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ com $d \in \mathbb{N}$. Escrevemos $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\rho}$ com parte inteira $\nu \in \mathbb{N}^d$ e parte fracionária $\rho \in [0, 1[^d$. Definamos

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{\boldsymbol{r}}} := \sup_{\substack{x \in \mathbf{F}^d, \\ \boldsymbol{h} \in \mathbf{F}^{*\nu_1+1} \times \cdots \times \mathbf{F}^{*\nu_d+1}}} \frac{|\Delta^{\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1}} f(x; \boldsymbol{h})|}{\prod_{k=1,\ldots,d} (|{}^k h_1| \cdots |{}^k h_{\nu_k}| \cdot |{}^k h_{\nu_k+1}|^{\rho_k})};$$

aqui $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$.

- Lembramos que, como variedade algébrica, $\mathbf{N} \simeq \mathbf{A}_1^{\Phi^+}$ com $\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i < j \in \{1, \ldots, n\}\}$ as racinas positives de $\mathbf{G}$. (Aqui $\varepsilon_i : T \to \mathbf{F}^*$ a função avaliando a coord. i do toro.)
- Então $\mathcal{C}^{\mathrm{alg}}(N, \mathbf{E}) = \{f : N \to \mathbf{E} \text{ polinomial }\}$ e por conseguinte

$$\mathcal{C}^{\mathrm{la}}(N, \mathbf{E}) = \{f : N \to \mathbf{E} \text{ loc. polinomial com sup. compacto }\}.$$

Conclusão

Temos uma identificação natural

$$\iota : \bigotimes_{\alpha \in \Phi^+} \mathcal{C}^{\mathrm{lp}}(\mathbf{F}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathrm{la}}(N, \mathbf{E}).$$

Definamos $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Phi^+}$ como se segue: Temos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^{\Delta} &\to T^+/T_0 Z \\ (n_\alpha) &\mapsto \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha \end{aligned}$$

com $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}\}$ as racinas simples.

Definição

Definamos $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Phi^+}$ por

$$r_\alpha := \begin{cases} v(\chi(t_\alpha)) & \text{se } \alpha \in \Delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição

Fornecemos $\mathcal{C}^{\mathrm{la}-\psi}(N, \mathbf{E})$ com a norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|f\| = \|\iota^{-1}(f)\|_{\mathcal{C}^{\boldsymbol{r}}}.$$

Resumo

- Construímos a G-representação localmente algébrica

$$i(\chi) = \{\text{certas funções } f : G \to \mathbf{E} \text{ localmente algébricas }\}.$$

- Obtivemos que a sua seminorma unitária *maximal* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ é dado pelo reticulado

$$\mathcal{L} = \sum_{w \in W} T_w(\mathcal{L}_w)$$

  com $\mathcal{L}_w \subseteq i(\chi_w)(N) = \{ \text{ todas } f \in i(\chi_w) \text{ suportadas em } N\}$ e certos isomorfismos $T_w : i(\chi_w) \to i(\chi)$ para todos $w \in W$.
- Via $f \mapsto f_{|N}$ observamos que $i(\chi)(N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\psi-\mathrm{alg}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E})$ se descreve como certas funções localmente polinomiais.
- Mostramos que $\mathcal{L}_w$ é livre se, e só se, $|\chi_w(t)| \leq 1$ para todos $t \in T^+$ pela construção de uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{\boldsymbol{r}}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ de certas funções $\boldsymbol{r}$-vezes diferenciáveis para $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{\Phi^+}_{\geq 0}$.

Conclusão

Corolário

Supomos que para todo $w \in W$ vale $|\chi_w(t)| \leq 1$ para todos $t \in T^+$. Então o reticulado unitário universal $\mathcal{L}$ da G-representação $i(\chi)$ é da forma

$$\mathcal{L} = \sum_{w \in W} \mathcal{L}_w \quad \text{com } \mathcal{L}_w \text{ livre.}$$

- Isto ainda não mostra diretamente que $\mathcal{L}$ mesmo é livre.
- Até agora somente o caso $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ é resolvido em geral por Berger e Breuil em [Berger and Breuil(2010)]. A demonstração deles esquisitamente revolta ao lado da representações de Galois usando a Correspondência de Langlands estabelecida para $n = 2$ e $\mathbf{F} = \mathbb{Q}_p$.

Esperamos que esta estratégia ajuda resolver o caso mais geral através um raciocínio mais direta.

- Berger, L., Breuil, C., 2010. Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Astérisque 330, 155–211.
- Breuil, C., Schneider, P., 2007. First steps towards p-adic langlands functoriality. Journal für die reine und angewandte Mathematik 2007 (610), 149–180.
- Nagel, E., 2012. The intertwined open cells in the universal unitary lattice of an unramified algebraic principal series. preprint.