Fonctions dérivables entrelacées

Enno Nagel *

Ces notes accompagnent mon exposé donné le 13 janvier 2014 dans le séminaire « Groupes Réductifs et Formes Automorphes » à Paris.

Un bref survol : L'étude de la dérivabilité de fonctions dans une variable avec valeurs dans des espaces non-Archimédiens remonte aux années 70 et la définition élémentaire présentée dans [Sch84] est aujourd'hui la référence pour fonctions dans une variable.

Récemment cette notion de la dérivabilité (fractionnaire) a resurgi dans la théorie de représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ comme moyen pour construire certains espaces de Banach ([Col10] et [BB10]). À partir de ce moment-là, on cherchait une approche plus conceptuelle à la notion de dérivabilité non-Archimédienne afin d'une généralisation aux groupes algébriques généraux.

Cet exposé résume cette genèse ainsi que les travaux [Nag16] et [?] qui donnent une reformulation de la construction de ces espaces de Banach cherchés pour un groupe réductif p-adique scindé.

Table des matières

*Merci à Ariane Mezard pour plusieurs remarques utiles.

0 Historique

Soit $\mathbf{E}$ une extension finie (suffisamment grande) de $\mathbb{Q}_p$ (sur laquelle nos représentations sont définies). Soit $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$ et fixons un Borel $\bar{P} \subseteq G$ et un tore maximal $T \subseteq \bar{P}$. Le programme de Langlands p-adique aspire à mettre les deux catégories suivantes en correspondance :

$$\begin{array}{c}
\{\text{rep. cont. de dim. } n \text{ de } \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\} \overset{?}{\leftrightarrow} \{\text{rep. de Banach unitaires de } G\} \\
\bigcup \\
\{ \text{ rep. cristallines } \} \\
|| \\
\{ \phi\text{-modules filtrés admissibles } \}
\end{array}$$

Une représentation de Banach est unitaire si l'action de groupe est continue et unitaire, c'est-à-dire sa topologie est induite par une norme invariante sous l'action de groupe.

Or on regarde la recette suivant de [BS07] pour attacher à une représentation de Galois *cristalline*, dont on s'en contente de savoir qu'ils se paramètrent par certains ϕ-modules filtrés *admissible*, une représentation de Banach unitaire : Donné $\phi, (V_k : k \in \mathbb{Z})$ un ϕ-module filtré,

— le type de ϕ (classe de conjugaison [sous le groupe de Weyl de G] de la part semi-simple de l'endomorphisme) correspond à un caractère nonramifié $\theta \colon T \to \mathbf{E}^*$, et

— le type de (V_k) (sautes de filtration) à un caractère algébrique dominant $\psi \colon T \to \mathbf{E}^*$ (qui correspond, par induction parabolique, à une représentation algébrique irréductible).

On associe à ces deux données respectivement une représentation *localement constante* (inspiré par la correspondance de Langlands classique) et une représentation *algébrique* (par une idée de Breuil), et prend leur produit tensoriel, c'est-à-dire

$$\phi, (V_k) \mapsto \mathrm{ind}_{\bar{P}}^{G} \theta^{\mathrm{lc}} \otimes \mathrm{ind}_{\bar{P}}^{G} \psi^{\mathrm{alg}} =: i(\chi)$$

où $\chi = \theta\psi$ est maintenant un caractère *localement algébrique*.

Conjecture. *La **complétion unitaire universelle** $\widehat{i(\chi)}$ est non nulle si et seulement si $\phi, (V_k)$ est admissible. (Et le vague espoir est que les propres filtrations correspondent à certains quotients de $\widehat{i(\chi)}$.)*

On décrira cette complétion unitaire universelle dans la section prochaine. Or le but de cet exposé est de voir comment elle se décrit comme quotient des certaines fonctions dérivables.

1 Description de la complété unitaire universelle

Soit G les points rationnels d'un groupe algébrique sur un corps topologique. Une représentation V de G est **localement algébrique** (localement algébrique) si ses orbites $o_v : g \mapsto gv$ sont localement algébriques.

Soit $\mathbf{o_E}$ l'anneau d'entiers d'**E**. Un **réseau** dans un **E**-espace vectoriel V est un $\mathbf{o_E}$-module **L** tel que **EL** = V. On rappelle l'équivalence

$$\{ \text{ semi-normes } \} \leftrightarrow \{ \text{ réseaux } \}$$

sur V en envoyant une norme $\|\cdot\|$ au réseau donné par sa boule d'unité fermée $B_{\leq 1} = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$.

Soit V une G-représentation localement algébrique. Dans ce cas on observe, et on l'utilisera comme définition, que sa représentation complétée unitaire universelle $\hat{V}$ est donnée par les réseaux G-stables minimaux. (Ici on précise que dorénavant on refera toujours en fait à la classe de commensurabilité du réseau ou réciproquement à la classe d'équivalence de la semi-norme.) Soit **F** une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Dorénavant on fixe

— G (les points rationnels d') un groupe réductif scindé sur **F**,

— P un Borel fixé et $\bar{P}$ celui opposé, et

— T un tore maximal dans B

Lemme. *Soit* V *une* G*-représentation localement algébrique de type fini (engendrée par l'ensemble $\{v_i\}$ disons). Le réseau unitaire universel de* V *est donné par* $\mathbf{L} = \sum \mathbf{o_E}[P] v_i$.

Démonstration : Cela reste sur l'observation que l'on peut toujours construire des normes invariantes sous un groupe compact.

Dans cette situation, on utilise que V est localement fini (le sous-espace engendré par un groupe compact est de dimension fini), G localement compact est la décomposition d'Iwasawa G = KP pour un groupe compact. □

Les résultats suivants sur la tournure de la représentation $i(\chi)$ en tant que $\mathbf{E}[\mathrm{P}]$-module sont inspirés par le cas lisse modulo p dans [Vig08]. On note néanmoins que dans notre cas de caractéristique 0 il y a plus de sous-représentations à cause de l'existence d'une mesure de Haar. (Par exemple son anneau sur la cellule ouverte introduite en bas.)

Lemme. *La représentation $i(\chi)$ est de type fini en tant que $\mathbf{E}[\mathrm{P}]$-module.*

On résout d'étudier $i(\chi)$ en tant que P-représentation alors.

2 La cellule ouverte

Soient N et $\bar{\mathrm{N}}$ les radicaux unipotents de P et $\bar{\mathrm{P}}$ respectivement. Soit $\mathrm{N} \supseteq \mathrm{N}_0$ un sous-groupe ouvert compact.

On rappelle que

$$i(\chi) = \{f : \mathrm{G} \to \mathbf{E} : f \text{ loc. alg. et } f(\bar{p}\cdot) = \chi(\bar{p})f \text{ pour } \bar{p} \in \bar{\mathrm{P}}\}$$

et G agit par $f^g = f(\cdot g)$.

On dénote par $i(\chi)(\mathrm{N})$ le sous-espace des fonctions dans $i(\chi)$ de support dans $\bar{\mathrm{P}}\mathrm{N}$. Il est stable sous P.

Lemme. *On a monomorphisme de* P*-représentations*

$$\begin{array}{rcl} i(\chi)(\mathrm{N}) & \to & \mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}) \\ f & \mapsto & f_{|\mathrm{N}} \end{array}$$

ou P *agit sur* $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N}) = \{f : \mathrm{N} \to \mathbf{E} : \text{ loc. pol. et } \operatorname{supp} f \text{ compact }\}$ *par*

$$f^p = \chi(p)f(\cdot^t n) \text{ pour } p = tn \text{ avec } t \in \mathrm{T}, n \in \mathrm{N}.$$

On rappelle que T agit sur N par conjugaison. On définit le monoïde $\mathrm{T}^+ = \{t \in \mathrm{T} : \mathrm{N}_0^t \subseteq \mathrm{N}_0\}$.

Lemme 2.1. *Le réseau unitaire universel* $\mathbf{L}$ *dans* $i(\chi)(\mathrm{N})$ *est donné par*

$$\mathbf{L} = \mathbf{o}_{\mathbf{E}}[\mathrm{P}]f_0 \quad \text{avec } f_0 = \mathbf{1}_{\mathrm{N}_0}\bar{u}$$

ou $\mathbf{1}_{\mathrm{N}_0}$ *prend valeur* 1 *sur* N_0 *et* 0 *ailleurs, et* $\bar{u}$ *le vecteur fixé par* $\bar{\mathrm{N}}$ *(unique à un scalaire près).*

Démonstration : On observe que T^+ diminue le support de $\mathbf{1}_{N_0}$ et N translate, tel que l'on obtient toutes les fonctions localement constantes. À la fois la théorie des représentations algébriques affirme que $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$ est engendrée par P. □

Proposition. *Le réseau unitaire universel* $\mathbf{L}$ *dans* $i(\chi)(N)$ *est livre si et seulement si* $|\chi(t)| \leq 1$ *pour tous* $t \in T^+$.

Démonstration : Pour la nécessité, on fait le calcul suivant. Soit u le vecteur du poids maximal dans $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$. Alors $u_{|N} = 1$ et T agit sur $f = \mathbf{1}_{N_0} \cdot u_{|N} = \mathbf{1}_{N_0}$ par $\mathbf{1}^t_{N_0} = \chi(t)\mathbf{1}_{{}^t N_0}$. Soit $t \in T^+$. On obtient

$$f = \mathbf{1}_{N_0} = \sum_{n \in N_0/{}^t N_0} \mathbf{1}_{{}^t N_0 n} = 1/\chi(t) \sum_{n \in N_0/{}^t N_0} f^{tn},$$

et alors

$$\|f\| \leq |1/\chi(t)| \max\{\|f^{tn}\| = |1/\chi(t)| \|f\|.$$

Si $\|f\| \neq 0$, alors $|\chi(t)| \leq 1$. □

Pour la preuve de la suffisance, on construit une norme de fonctions dérivables.

3 Normes et Polynômes de Taylor

On rappelle que $\mathbf{N} = \mathbb{A}^{\Phi^+}$ comme variété algébrique où Φ^+ dénote les racines positives. Donné $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}$ et $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(N)$, soit

$$D^{\boldsymbol{n}} f = 1/\boldsymbol{n}! \partial f / \underbrace{\cdots \partial x_\alpha^{n_\alpha} \cdots}_{\text{tous } \alpha \in \Phi^+}$$

où $n = |\boldsymbol{n}|$ la somme des entrées de $\boldsymbol{n}$ (et dorénavant la notation multi-index commune). On note que $D^{\boldsymbol{m}} D^{\boldsymbol{n}} f = \binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}$.

Le polynôme de Taylor de f autour du point x_0 dans N s'écrit

$$T f(x_0 + h, x_0) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}} D^{\boldsymbol{n}} f(x_0) h^{\boldsymbol{n}}.$$

On a ensuite le reste de Taylor

$$R f(x_0 + h, x_0) = f(x_0 + h) - T f(x_0 + h, x_0).$$

On rappelle que l'on assume $|\chi(t)| \leq 1$ pour tous $t \in T^+$. La définition suivante a alors du sens.

Définition 3.1. On définit la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\chi}$ sur $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$ par

$$\|f\|_{\mathscr{C}^\chi} = \sup\{\|\mathrm{R}\, f^{n_0}\|_{\mathrm{N}_0^t}/|\chi(t)| : n_0 \in \mathrm{N}, t \in \mathrm{T}\}$$

où $\|\cdot\|_{\mathrm{N}_0^t}$ dénote la norme sup de la fonction $\mathrm{R}\, f^{n_0}$ restreinte à $\mathrm{N}_0^t \times \mathrm{N}_0^t$.

Proposition. *La norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\chi}$ correspond au réseau unitaire universel $\mathbf{L}$ donné dans Lemme 2.1.*

Comparaison avec d'autres notions de dérivabilité

Soit Δ la base de racines de G. Soit T_0 le sous-groupe compact maximal dans T est Z le centre de G.

Si $\#\Delta = 1$, on note que $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\chi}$ est sur $\mathbb{N} = \mathbf{F}$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^r}$ dans [Col10] avec $r = \chi(t_\alpha)$ pour $t_\alpha \in \mathrm{T}^+$ une pré-image de 1 dans $\mathbb{Z} = \mathrm{T}/\mathrm{Z}\mathrm{T}_0$. (On généralise sa définition canoniquement à $\mathbf{F}$ et regard dans sa définition les fonctions sur $\mathbb{N}_0$ comme étendues sur N par 0.)

Stratégie de la Preuve de la Proposition

Remplacer $\mathbf{L}$ par $\mathbf{L}'$. On rappelle que le réseau $\mathbf{L}$ est en tant que $\mathbf{o_E}[\mathrm{P}]$-module engendré par quelconque ensemble de générateurs de $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$ comme $\mathbf{K}[\mathrm{P}]$-module. On choisit les générateurs suivants.

Par [Jan03, PropositionII.2.4(b)] la T-représentation $i(\psi)^{\mathrm{alg}}$ prend la forme

$$i(\psi)^{\mathrm{alg}} = \mathrm{U} = \bigoplus_{\xi \in \mathrm{wt}(\psi)} \mathrm{U}(\xi) \quad \text{avec } \{w_0 \cdot \psi, \psi\} \subseteq \mathrm{wt}(\psi) \subseteq \{\xi : w_0 \cdot \psi \leq \xi \leq \psi\}.$$

Ici T agit sur $\mathrm{U}(\xi)$ par le caractère ξ et, en dénotant par Δ la base de racines, pour deux caractères algébriques ζ et η, il vaut $\zeta \leq \eta$ si $\zeta - \eta = \sum_{\alpha \in \Delta} i_\alpha \alpha$ pour entiers $i_\alpha \geq 0$. (On rappelle que $\mathrm{U}(\psi) = \mathbf{K} u_\psi$ est de dimension 1 est $u_\psi = 1$ restreint à N.) Par l'algorithme de Gauss, on peut choisir pour U une base $\{u_{\boldsymbol{i}} : \boldsymbol{i} \in \Psi\}$ avec Ψ dans $\mathbb{N}^{\Phi^+}$ tel que le monôme $x^{\boldsymbol{i}}$ ne parait (a coefficient nonnul) que dans l'expansion de $u_{\boldsymbol{i}}$.

Nous mettons

$$\mathbf{L}' = \sum \mathbf{o_E}[\mathrm{P}] f_{\boldsymbol{i}} \quad \text{avec } f_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{1}_{\mathrm{N}_0} \cdot u_{\boldsymbol{i}},$$

et réciproquement établissons la norme suivante.

Définition. On définit la norme $\|\cdot\|'_{\mathscr{C}^\chi}$ sur $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$ par

$$\|f\|'_{\mathscr{C}^\chi} = \max\{\{\sup\{\|\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{i}} f^{n_0}\|_{\mathrm{N}_0^t}/|\chi_{\boldsymbol{i}}(t)| : n_0 \in \mathrm{N}, t \in \mathrm{T}\} : \boldsymbol{i} \in \Psi\}$$

où $\xi_{\boldsymbol{i}}$ est le poids pour lequel $u_{\boldsymbol{i}}$ est dans $\mathrm{U}(\xi)$.

Prouver que $\|\cdot\|'_{\mathscr{C}\chi}$ est associée à $\mathbf{L}'$. Par définition du réseau unitaire universel, il faut prouver que $\|\cdot\|'_{\mathscr{C}\chi}$ est la norme la plus grande sur $i(\chi)(\mathrm{N})$ qui est bornée sur $\mathrm{P} \cdot f_i$ pour tous $\boldsymbol{i} \in \Psi$. On identifie $i(\chi)(\mathrm{N})$ avec son image dans $\mathscr{C}^{\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$ et l'appelle dorénavant $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$.

À cette fin, la vérification des conditions suivantes suffira :

(i) Elle est P-invariant, et

(ii) il y a une base **localement orthonormale** de $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(\mathrm{N})$ dans $\{p \cdot f_i : p \in \mathrm{P}, \boldsymbol{i} \in \Psi\}$. (C'est-à-dire on peut épuiser l'espace par des sous-espaces qui possèdent une base orthonormale.)

Condition (i) est satisfaite par définition de la norme dont le supremum parcourt assez des éléments pour inverser l'action de groupe.

Lemme 3.2. *La norme* $\|\cdot\|'_{\mathscr{C}\chi}$ *est* P*-invariante.*

Démonstration : Il suffit de le vérifier pour $\|\cdot\|_{\mathscr{C}\chi}$. Quant à N, on note que N agit par translation.

Quant à l'action de T, on fait le calcul suivant : Soit $f : \mathrm{N} \to \mathbf{K}$ localement polynomiale de support compact. Soit $n_0 \in \mathrm{N}$, $t_0 \in \mathrm{T}$ et $n_1, n_2 \in \mathrm{N}_0^{t_0}$. Il faut trouver $n_0' \in \mathrm{N}, t_0' \in \mathrm{T}$ et $n_1', n_2' \in \mathrm{N}_0^{t_0'}$ tels que

$$|\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}}(f^t)^{n_0}(n_1, n_2)|/|\theta\xi(t_0)| = |\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f^{n_0'}(n_1', n_2')|/|\theta\xi(t_0')|.$$

Par définition et linéarité de l'action de T,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}}(f^m)^{n_0}(n_1, n_2) &= [\xi - \psi](t)\,\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f^{n_0}(n_1^t, n_2^t)\\ &= \theta\xi(t)\,\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f(\cdot^t n_0)(n_1, n_2)\\ &= \theta\xi(t)\,\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f^{n_0}(n_1^t, n_2^t).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}}(f^t)^{n_0}(n_1, n_2)|/|\theta\xi(t_0)| &= |\theta\xi(t)||\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f^{n_0}(n_1^t, n_2^t)|/|\theta\xi(t_0)|\\ &= |\mathrm{R}\,\mathrm{D}^{\boldsymbol{n}} f^{n_0'}(n_1', n_2')|/|\theta\xi(t_0')|,\end{aligned}$$

où $n_0' = n_0$, $t_0' = t_0 t^{-1}$ et $n_1' = n_1^t, n_2' = n_2^t \in \mathrm{N}_0^{t_0'}$. □

Condition 2 nécessite deux étapes :

(a) D'abord l'épuisement par des sous-espaces, et

(b) après la construction d'une base orthonormale pour un tel sous-espace. Cette base est inspirée par la base de van der Put (dans [Sch84]) ou de « vaguelettes » (dans la terminologie de Colmez dans [Col10]).

Adressons Condition (a) : Soit T_0 le sous-groupe compact maximal dans T est Z le centre de G. Comme l'action de T_0Z sur N_0 par conjugaison est triviale, $\mathbb{Z}^\Delta = T/T_0Z$ agit sur N. Donné $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^\Delta$, on pose $N_{\boldsymbol{i}} = {}^{\boldsymbol{i}}N_0$, et obtiens ainsi une filtration épuisante de N indexée par $\mathbb{Z}^\Delta$, et on voit :

Lemme 3.3. *On a une identité des espaces normés*

$$\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{lp}}_{\mathrm{cpt}}(N, \mathbf{E}) = \bigcup_{\substack{\boldsymbol{i},\mathbf{I} \in \mathbb{Z}^\Delta \\ \textit{avec } \boldsymbol{i} \leq \mathbf{I}}} \mathscr{C}^{\mathrm{cst}}(N_{\boldsymbol{i}}/N_{\mathbf{I}}, \mathbf{E}) \otimes i(\psi).$$

On remarque l'abuse de notation : Une fonction sur un sous-ensemble de N est regardée comme étendue à tout N par 0, et une fonction sur un quotient N est regardée comme localement constante.

On tourne vers Condition (b). Il suffit de montrer le suivant :

Lemme 3.4. *Let* $\mathbf{L} \geq 0$*. L'espace normé* $\mathscr{C}^{\psi-\mathrm{lp}}(N_0/N_{\mathbf{L}}, \mathbf{E})$ *a une base orthonormale donnée par*

$$\{f_0 \otimes u_{\boldsymbol{i}}^{p} : p \in P, \boldsymbol{i} \in \Psi\}.$$

Démonstration : Cela se fait explicitement.

Construction : Soit

$$R = \bigcup_{\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^\Delta} R_{\boldsymbol{l}}$$

où $R_{\mathbf{L}} = \widehat{N_0/N_{\boldsymbol{l}}}$ un ensemble de représentants de $N_0/N_{\boldsymbol{l}}$, choisi tel que $R_{\mathbf{0}} = \{1\}$ et

$$R_{\boldsymbol{l}} \supseteq R_{\boldsymbol{k}} \quad \text{if } N_{\boldsymbol{l}} \subseteq N_{\boldsymbol{k}}.$$

Donné $r \in R$, on associe à r un pas de filtration $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}(r)$ dans $\mathbb{N}^\Delta$ parmi tous les éléments minimaux dans $\mathbb{N}^\Delta$ tel que $N_{\boldsymbol{l}} \ni r$.

Finalement, pour $r \in R$, posons

$$e_r = \mathbf{1}_{N_0}^{\ell(r)r^{-1}} = \mathbf{1}_{\ell(r)N_0 r} = \mathbf{1}_{N_{\ell(r)r}},$$

et, pour $r \in R$ et $\boldsymbol{i} \in \Psi$ l'analogue

$$e_{r,\boldsymbol{i}} = (\mathbf{1}_{N_0} \otimes u_{\boldsymbol{i}})^{\ell(r)r^{-1}}.$$

Vérification : Encore plus technique que la construction est alors omise ici. □

Montrer que $\|\cdot\|'_{\mathscr{C}^\chi}$ et $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^\chi}$ sont équivalentes. L'équivalence des normes suit directement de l'observation suivante.

Proposition. *Soit* $i \in \Psi$. *Alors il y a un constant* $C \geq 1$ *tel que pour tous* $t \in T$ *et* $n_0 \in N$ *vaut*

$$\begin{array}{rcl} & |\psi/\xi_i(t)| & \|R\, D^i f^{n_0}\|_{N_0^t} \\ \leq & C & \{\sup\{\|R f^{n_0}\|_{N_0^t}/|\chi(t)| : n \in n_0 N_0^t\}. \end{array}$$

4 Entrelacements de Cellules ouvertes

On rappelle que le réseau unitaire universel de $i(\chi)$ est un $\mathbf{o_E}[P]$-module de type fini. On donne une description explicite à travers des opérateurs d'entrelacement.

Soit W le groupe de Weyl. Il opère sur les caractères sur T par conjugaison, $\xi^w = \xi(\cdot^w)$. Soit

$$\delta_P \colon tn \mapsto |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}}(t)|$$

le **caractère de module** de P (où $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N). Il vaut $\operatorname{im} \delta_P/\delta_P^w \subseteq p^{2\mathbb{Z}}$ et alors $(\delta_P/\delta_P^w)^{1/2}$ est bien défini. On met

$$\theta_w = \theta^w(\delta_{\bar{P}}/\delta_{\bar{P}}^w)^{1/2} \quad \text{et} \quad \chi_w = \theta_w \psi.$$

On note que l'on travaille sur un corps p-adique général et alors $\sqrt{p}$ n'existe pas forcément. Alors il n'y a pas de normalisation de l'induction parabolique comme sur $\mathbb{C}$, les nombres complexes. Un calcul du module de Jacquet $i(\chi)_N$ fournit par la réciprocité de Frobenius les opérateurs suivants.

Theorème. *Soit* θ *régulier, c'est-à-dire seulement* 1 *dans* W *fixe* θ. *Alors il y a des homomorphismes de* G*-représentations*

$$T_w^{-1} \colon I(\chi_w) \to I(\chi) \textit{ pour tous } w \in W.$$

Lemme 4.1. *Le réseau unitaire universel de* $i(\chi)$ *est donné par*

$$\mathbf{L} = \sum_{w \in W} \mathbf{o_E}[P] \cdot T_w^{-1}(\mathbf{1}_{N_0} \otimes \bar{u}).$$

Corollaire. *Soit* θ *régulier. Si*

$$|\chi_w(M^+)| \leq 1 \quad \textit{pour tous } w \in W,$$

alors le réseau unitaire universel $\mathbf{L} \subseteq I(\chi)$ *est de la forme*

$$\mathbf{L} = \sum_{w \in W} \mathbf{L}_w \quad \textit{avec } \mathbf{L}_w = \mathbf{o_E}[P] \cdot T_w^{-1}(\mathbf{1}_{N_0} \otimes \bar{u}) \textit{ un } \mathbf{o_E}\textit{-module livre.}$$

Cela ne suffit pas pour savoir que $\mathbf{L}$ lui-même est livre. Voici un contre-exemple pathologique : Soit $V = \mathbb{Q}_p^{(\mathbb{N})}$ les séquences dont les entrées sauf un nombre fini sont nulles, et $\mathbf{L} = \mathbb{Z}_p^{(\mathbb{N})}$. Comme $\mathbb{Q}_p$ est séparable, on obtient que $V/\mathbf{L}$ est dénombrable, disons par $(v_n : n \in \mathbb{N})$, et on peut les dénombrer tels que v_{n+1} soit linéairement indépendant de $v_1, \ldots, v_n$. Alors $\mathfrak{M} = \bigoplus \mathbb{Z}_p v_n$ est livre, mais $\mathbf{L} + \mathfrak{M} = V$.

On continue à présumer que $|\chi_w(M^+)| \leq 1$ pour tous $w \in W$. On obtient une séquence exacte

$$0 \to \ker \to \bigoplus_{w \in W} i(\chi_w)(N) \xrightarrow{T_w^{-1}} i(\chi) \to 0.$$

On vient de montrer que l'espace au milieu $M = \bigoplus_{w \in W} i(\chi)(N)$ a une norme. Or pour montrer que $i(\chi)$ a également une norme, il faut voir que le noyau ker soit fermé. Ceci donne le critère suivant.

Proposition. *La complétion unitaire universelle de $i(\chi)$ est non nulle si et seulement si l'opérateur*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{w \in W - \{1\}} i(\chi_w)(N) & \to & i(\chi) \\ f_w & \mapsto & \sum_{w \in W} T_w^{-1}(f_w) \end{array}$$

restreint à sa pré-image de $i(\chi)(N)$ est fermé. (C'est-à-dire son graphe est fermé.)

La notion d'un opérateur étant fermé est courante dans le monde réel. L'exemple clé est l'opérateur de dérivation avec la norme de supremum. On remarque qu'il n'est pas continu ; cette condition serait trop forte.

Exemple. Si $\mathbf{G} = GL_2$, la proposition ci-dessus dit qu'il faut que l'opérateur T_w^{-1} soit fermé sur le sous-espace $\{f \in i(\chi_w)(N) : \int f(n)\, H_N(dn) = 0\}$, le noyau de la mesure de Haar sur N.

Démonstration : Par définition, T_w est le produit de convolution de la mesure de Haar translatée $H_{\bar{N}}(f(w\cdot))$ sur $\bar{N}$. C'est-à-dire plus précisément $T_w(f(g)) = H_{\bar{N}}(f(w \cdot g))$. Il vaut $g = T_w(f) \in i(\chi)(N)$ si et seulement si $g(w) = 0$, c'est-à-dire

$$H_{\bar{N}}(f(w \cdot w)) = H_N(f) = 0.$$

Références

[BB10] L. Berger and C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[BS07] C. Breuil and P. Schneider, *First steps towards p-adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 149–180. MR 2359853. DOI 10.1515/CRELLE.2007.070.

[Col10] P. Colmez, *Fonctions d'une variable p-adique*, Astérisque (2010), no. 330, 13–59. MR 2642404.

[Jan03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2015057.

[Nag16] E. Nagel, *Fractional differentiability and unitarity on parabolic inductions*, Advances in non-Archimedean analysis, Contemp. Math., vol. 665, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 177–197. MR 3509807. DOI 10.1090/conm/665/13306. Confer `http://www.math.jussieu.fr/~nagel/publications/crOpenCell.pdf`.

[Sch84] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1984, An introduction to p-adic analysis. MR 791759.

[Vig08] M.-F. Vignéras, *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques*, GAFA Geom. funct. anal. **17** (2008), no. 6, 2090–2112. DOI 10.1007/s00039-007-0646-3.