Análise Complexa

Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas

Outono 2019

Enno Nagel

Sumário

Introdução

A Análise Complexa estuda funções diferenciáveis sobre $\mathbb{C}$ (com valores em $\mathbb{C}$). Como espaço vetorial $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, mas a definição da diferenciabilidade usa a estrutura de anel de $\mathbb{C}$, o que torna a condição de diferenciabilidade mais restritiva em comparação com a sobre $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Explicitamente, a função linear aproximativa $\mathrm{A} = f'(a)$, o *diferencial total* em um ponto a de uma função diferenciável f sobre $\mathbb{C}$ é *conformal*, isto é, preserva os comprimentos e os ângulos entre os vetores. Esta restrição tem fortes consequências, por exemplo, que toda função diferenciável é *analítica*, isto é, localmente dada por uma série de potências.

Referências Bibliográficas

A nossa referência principal é [Con95] que começa uma revisão de espaços métricos e em seguida preferi definições elementares em vez de conceptuais. Como alternativa com uma abordagem mais computacional existe [Ahl78]. Como clássico, pela sua clareza de exposição, com uma abordagem mais conceptual existe [Car61] (o original em francês) ou [Car95] (a sua tradução para inglês) cujos Capítulos II e III resumem bem o cerne da Teoria da Análise Complexa.

Agradecimentos

Agradeço

- a Gilmar Batista, Allan Kenedy e Carlos Alberto Santos Barbosa a digitação de correções e acréscimos do manuscrito;
- a Deivid Santos, Manuel Vinicius, Cleone Matuva, Carlos Henrique e Marta de Fátima Severiano de Oliveira, Jandir Cor., Nemuel Rocha Lima, Eric Alberto e Diego Ramon a leitura atenta do manuscrito e a indicação de umas correções e sugestões;
- a Dione Andrade Lara a sugestão de vários (contra-)exemplos de topologia.

Pré-requisitos

Recordemo-nos de umas notações e técnicas a que recorreremos sem mais explicações no que se seguirá:

Notações

Lembremo-nos das notações

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ para os *números naturais*.
- $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ para os *números inteiros*,
- $\mathbb{Q} = \{x/y$ para x, y em $\mathbb{Z}\}$ para os *números racionais*, por exemplo, $2/3$ é um número real, e
- $\mathbb{R} = \{a_N 10^N + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots\}$ com $a_N, \ldots, a_1, a_0, a_{-1} \ldots,$ em $\{0, 1, \ldots, 9\}$ para os *números reais*; por exemplo, $\pi = 3{,}14159\ldots$ é um número real.

Denotemos uma função f com domínio X e contra-domínio Y por $f \colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$. Para definir uma função, usemos

- ou $\cdot$ para denotar o seu argumento, por exemplo, $\cdot^n$ denota a função que envia todo elemento x no seu domínio a x^n;
- ou a notação $x \mapsto \ldots$, por exemplo, $x \mapsto x^n$ denota a função que envia todo elemento x no seu domínio a x^n.

Para uma aplicação linear $f \colon X \to Y$, são usuais:

- em vez de $f(X)$, a notação
$$\operatorname{im} f := \{y \in Y : \text{ existe } x \in X \text{ com } y = f(x)\}$$
para a *imagem* de f, o conjunto de todos os seus valores é usual;
- em vez de $f^{-1}\{0\}$, a notação
$$\ker f := \{x \in X : f(x) = 0\}$$
para o seu *núcleo*, o conjunto de todos os argumentos anulados por f.

Para uma função f é uma constante C, denote $f \equiv c$ que f é constante com o único valor C.

Se a pertença das letras latins i, j, k, l, m e n não foi dada, elas denotem inteiros; em enumerações denotem inteiros não-negativos.

Técnicas

Prova por Contraposição: Em vez de mostrar A $\implies$ B, mostra-se, equivalentemente, que !A $\implies$!B onde !A respectivamente !B denote que A respectivamente B é falso. Na literatura, usa-se frequentemente a demonstração por contradição a este fim:

1. Suponha-se que !B e A valem.
2. Mostre-se que !A vale.
3. Constate-se a contradição que A e !A valem.
4. Conclui-se que B deve valer.

Idiossincrasias de Português

Até a versão final, por enquanto, o português escrito é mais formal, por exemplo:

- usa-se a primeira pessoa plural em vez da terceira pessoa "A gente", por exemplo, "Temos" e "Diremos" ao invés de "A gente tem" e "A gente vai (ou vamos) dizer";
- usa-se a forma plural do pronome apassivador quando o objeto é no plural, por exemplo, "usam-se expressões" ao invés de "usa-se expressões";
- usam-se pronomes átonos ao invés de tónicos, por exemplo, "prová-lo" e "vemo-la" ao invés de "provar ele" e "vemos ela";
- usa-se uma proposição após o pronome relativo quando possível, por exemplo, "o limite de que a sequência se aproxima" ao invés de "o limite que a sequência se aproxima";
- refere-se ao leitor pela segunda pessoa, tu, em vez de você, vossa excelência, a senhora ou o senhor; por exemplo, o imperativo "Vem!" ao invés de "Venha!" ou "Mostra!" ao invés de "Mostre!" (principalmente para evitar a ambiguidade entre o imperativo dirigido ao leitor e o subjuntivo impessoal como "Seja ... ");
- a ortografia oscila entre a usual no Brasil e a usual nos outros países lusófonos, por exemplo, "polinómio" ao invés de "polinômio".

- usam-se hífenes para palavras compostas cujos elementos perdem o seu sentido individual, por exemplo, “dia-a-dia” ao invés de “dia a dia”;
- usam-se às vezes expressões e palavras desusadas quais
  - “se e tão-somente se” ao invés de “se e somente se”,
  - “à volta de” ao invés de “em volta de” (principalmente para evitar a ambiguidade “uma bola em volta de algum ponto em algum conjunto”), e
  - “diferençável” ao invés de “diferenciável”;
  - “secção” ao invés de “seção” por não ser homónimo com “sessão”, “cessão” e “cessam”;
- são usados uns termos matemáticos incomuns, por exemplo,
  - *inclinação* ou *declive* ao invés de *coeficiente angular* de uma reta no plano;
  - *parcela (geral)* ao invés de *termo (geral)* de uma soma finita ou de uma série;
  - cada parcela de um polinômio ou de uma série de potências (de uma incógnita) é produto de uma constante, o *coeficiente*, e uma potência de uma incógnita.
- são usados umas notações matemáticas incomuns, por exemplo,
  - a variável d ao invés de n para denotar a dimensão,
  - a variável N ao invés de n_0 para denotar um número natural suficientemente grande.
- por razões técnicas, por enquanto, refere-se aos títulos dos enunciados sem o artigo definido, por exemplo, “Por Proposição 1” ao invés de “Pela Proposição 1”.

1. Os Números Complexos

Seja

$$\mathbb{C} \coloneqq \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

a álgebra sobre $\mathbb{R}$ definida por $i^2 = -1$. Se $z = a + ib$, denotemos $a = \Re z$ e $b = \Im z$ e chamamos a e b a parte *real* respectivamente *imaginária* de z. Temos

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Logo, para $z = a$ e $w = b$ em $\mathbb{R}$, temos

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \tag{$*$}$$

isto é, $\mathbb{C}$ é um corpo.

1.1. Conjugação e Norma

Seja a aplicação $\sigma = \bar{\cdot}$ sobre $\mathbb{C}$ dada por

$$\overline{a + ib} \coloneqq a - ib;$$

é um *automorfismo*, isto é,

- é um *homomorfismo*, isto é, respeita as operações $+$ e $\cdot$, isto é, $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ e $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.
- é um *endomorfismo*, isto é, envia $\mathbb{C}$ a si mesmo
- é um *isomorfismo*, isto é, injetor e sobrejetor.

Além disto é *auto-inverso*, o seu próprio inverso, isto é, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, ou $\sigma^{-1} = \sigma$.

Observação. Como $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,

$$\sigma(x) = \sigma(x - y + y) = \sigma(x - y) + \sigma(y)$$

isto é, $\sigma(x - y) = \sigma(x) - \sigma(y)$; analogamente, para y diferente de zero, como $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$,

$$\sigma(x) = \sigma(x/y \cdot y) = \sigma(x/y)\sigma(y)$$

isto é, $\sigma(x/y) = \sigma(x)/\sigma(y)$ (onde $\sigma(y) \neq 0$ porque σ é injetor).

Exercício 1.1. Se $P(X)$ em $\mathbb{R}[X]$, então, $P(\alpha) = 0$ se, e tão-somente se, $P(\overline{\alpha}) = 0$ para todo α em $\mathbb{C}$.

Seja a norma $|\cdot|$ de $\mathbb{C}$ dada por

$$|a + ib| \coloneqq \sqrt[2]{a^2 + b^2};$$

é um *valor absoluto*, isto é uma aplicação $|\cdot| \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

- (Hausdorff) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,
- (Multiplicatividade) $|xy| = |x||y|$, e
- (Desigualdade Triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Para demonstrar a desigualdade triangular, observamos

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + \bar{w}^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + \bar{w}^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Observação. Temos $|z + w| = |z| + |w|$ se, e tão-somente se, $|z\bar{w}| = \Re z\bar{w}$ se, e tão-somente se, $z\bar{w} \geq 0$.

O automorfismo é *isométrico*, isto é, $|\bar{z}| = |z|$. Temos

$$|z|^2 = \overline{z}z \tag{$*$}$$

Logo, se $z = a + ib \neq 0$, então $(*)$ é

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Observamos

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad i\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Exercício 1.2. Demonstra

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

1.2. Projeção estereográfica

Queremos acrescentar um ponto infinito a $\mathbb{C}$: Seja

$$\mathbb{S}^2 \coloneqq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Seja $N := (0, 0, 1)$ o pólo norte e identifique

$$\mathbb{C} \coloneqq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, considere a reta que passa por z e $N \in \mathbb{S}^2$ e que encontra $\mathbb{S}^2$ em um único ponto Z:

- Se $|z| < 1$, então Z está no hemisfério sul;
- Se $|z| > 1$, então Z está no hemisfério norte;
- Se $|z| = 1$, então $z = Z$ está no equador.

Se $|z| \to \infty$, então Z aproxima-se de N; logo N será identificado com ∞ e

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2.$$

A reta através de N e z é dada pelos pontos da forma

$$z + t(N - z) = tN + (1 - t)z \qquad \text{para } t \in]\infty, \infty[.$$

ou, usando o valor de N e $z = (x, y, 0)$,

$$((1 - t)x, (1 - t)y, t) \qquad \text{para } t \in]\infty, \infty[. \tag{$*$}$$

Dado z, para encontrar o valor de t para Z, observamos

$$1 = |Z| = (1 - t)^2 x^2 + (1 - t)^2 y^2 + t^2 = (1 - t)^2 |z|^2 + t^2,$$

logo

$$1 - t^2 = (1 - t)^2 |z|^2.$$

Como $t \neq 1$, temos, dividindo por $1 - t$,

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Logo, para $(x_1, x_2, x_3) = Z = tN + (1 - t)z$ com $N = (0, 0, 1)$ e $z = (x, y, 0)$,

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \text{ e } x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

ou

$$Z = (x_1, x_2, x_3) \text{ onde } x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \text{ e } x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \tag{1.1}$$

Vice-versa, dado $Z = (x_1, x_2, x_3)$, para encontrar $z = (x, y, 0)$, observamos por $(*)$ que $1 - t = 1 - x_3$, logo $x = \frac{x_1}{1 - x_3}$ e $y = \frac{x_2}{1 - x_3}$, isto é,

$$z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}.$$

Definamos uma função distância sobre $\mathbb{S}^2$ pela restrição da norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{S}^2$, isto é,

$$\mathrm{d}(Z, Z') \coloneqq \sqrt[2]{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} \tag{1.2}$$

Como $|Z| = |Z'| = 1$, obtemos

$$\mathrm{d}(Z, Z') = 2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3').$$

Por (1.1),

$$\mathrm{d}(Z, Z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt[2]{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{d}(Z, Z')]^2 \\
&= 2 - 2(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3') \\
&= 2 - 2\left(\frac{(z + \overline{z})(z' + \overline{z}')}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} + \frac{-i(z - \overline{z})[-i(z' - \overline{z}')]}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)} + \frac{(|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}\right) \\
&= 2 - 2\left(\frac{(z + \overline{z})(z' + \overline{z}') - (z - \overline{z})(z' - \overline{z}') + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}\right) \\
&= \frac{2[(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2) - (z + \overline{z})(z' + \overline{z}') + (z - \overline{z})(z' - \overline{z}') - (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)]}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}.
\end{aligned}$$

Observamos que

$$(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2) - (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1) = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

e

$$(z - \overline{z})(z' - \overline{z}') - (z + \overline{z})(z' + \overline{z}') = -2z\overline{z}' - 2\overline{z}z'.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}(Z,Z')]^2 &= \frac{2(2|z|^2+2|z'|^2-2z\overline{z}'-2\overline{z}z')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{4(z\overline{z}+z'\overline{z}'-z\overline{z}'-\overline{z}z')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{4(z(\overline{z}-\overline{z}')-z'(\overline{z}-\overline{z}'))}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{4(z-z')(\overline{z}-\overline{z}')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{4(z-z')(\overline{z-z'})}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\\
&= \frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)},
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

Semelhantemente

$$
\mathrm{d}(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt[2]{1+|z|^2}}
$$

pois, por (1.2),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2(z,\infty) &= \mathrm{d}^2(z,N)\\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_3+1\\
&= 2-2x_3\\
&= 2-2\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\\
&= 2+2\left(\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)\\
&= \frac{2+2|z|^2+2-2|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{4}{1+|z|^2}.
\end{aligned}
$$

1.3. A linha projetiva complexa

A linha projetiva complexa é o conjunto de linhas vetoriais de $\mathbb{C}^2$. Podemos vê-lo como quociente de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência $(z',t') \sim (z,t)$ se existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(z',t') = \lambda(z,t)$.

Denotemos este quociente por $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, e escrevemos $[z,t]$ para a classe de equivalência do vetor (z,t); isto é, a reta que passa pela origem e (z,t).

Observação 1.3. Temos

- que $\phi_1 : z \mapsto [z,1]$ é uma *bijeção* $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - [1,0]$, e
- que $\phi_2 : z \mapsto [1,z]$ é uma *bijeção* $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - [0,1]$.

Essas duas maneiras de identificar $\mathbb{C}$ em $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ menos um ponto são análogas às identidades de $\mathbb{R}^2$ para a esfera de unidade privada de um ponto usando projeções estereográficas dos pólos norte e sul: Seja

$$\mathbb{S}^2 \coloneqq \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.4. Seja $N \coloneqq (0,0,1)$ o pólo norte e $S \coloneqq (0,0,-1)$ o polo sul, e identifiquemos

$$\mathbb{C} \coloneqq \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 : Z = 0\}.$$

Temos

- uma *bijeção* $\eta_1 \colon \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2 - N$ definida por

$$z \mapsto (X,Y,Z) \quad \text{com } X = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, Y = \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \text{ e } Z = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

- uma *bijeção* $\eta_2 \colon \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2 - S$ definida por

$$z \mapsto (X,Y,Z) \quad \text{com } X = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, Y = \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \text{ e } Z = \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}.$$

Ao compormos estas identificações, obtemos a seguinte bijeção *explícita* entre $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

Observação 1.5. Temos a bijeção e a sua função inversa,

$$g \colon \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad g^{-1} \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$$

definidas por

$$(X,Y,Z) \mapsto [X+i, 1-Z] \text{ para } Z \neq 1 \quad \text{e} \quad (X,Y,Z) \mapsto [1+Z, X-iY] \text{ para } Z = 1,$$

onde observemos que estas duas definições são compatíveis para $Z \neq \pm 1$ graças à equação $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, e, ao identificarmos $\mathbb{R}^3$ com $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, por

$$g^{-1} \colon (z,t) \mapsto \left(\frac{2z\bar{t}}{|z|^2+|t|^2}, \frac{|z|^2-|t|^2}{|z|^2+|t|^2} \right).$$

2. Espaços Métricos

A nossa intuição provirá do plano euclidiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (o qual, como espaço métrico, se identifica com $\mathbb{C}$) onde a distância entre dois pontos mede o comprimento do segmento (da reta) que os conecta:

Definição. Seja X um conjunto. Uma aplicação $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ é uma função *distância* ou *métrica* se

- $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,   (Hausdorff)
- $d(x,y) = d(y,x)$, e   (simetria)
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.   (desigualdade triangular)

Um *espaço métrico* é um par (X,d) de um conjunto X e uma função distância d como acima.

De agora em diante, convencionemos que X, se não for especificado diferentemente, denote um espaço métrico.

Definição (Bolas). Para x em X e $r > 0$, defina a *bola aberta* respectivamente *fechada* com *raio* r e *centro* x (ou *à volta de* x) por

$$B(x;r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) < r\} \quad \text{e} \quad \bar{B}(x;r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

O conjunto dos pontos $\bar{B}(x;r)$

- para $X = \mathbb{R}^3$ e d a métrica usual, isto é, que mede a distância euclidiana, é uma bola.
- para $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e d a métrica usual, é um disco, e
- para $X = \mathbb{R}$ e d a métrica usual, é um intervalo (com as suas extremidades).

Em contraste a $\bar{B}(x;r)$, o conjunto $B(x;r)$ não contém a superfície de $\bar{B}(x;r)$; isto é, falta

- para $X = \mathbb{R}^3$ a esfera,
- para $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o círculo, e
- para $X = \mathbb{R}$ os pontos extremos.

Observação. Observamos que um espaço métrico X é Hausdorff se (e tão-somente se) para todo par de pontos diferentes x e y em X existem bolas disjuntas $B \ni x$ e $C \ni y$: Temos $x \neq y$ se, e tão-somente se, $d(x,y) = \epsilon > 0$; logo quaisquer bolas de raio $r < \epsilon/2$ e centros x respectivamente y são disjuntas.

Se o espaço métrico é um anel normado ou um espaço vetorial normado, então o elemento neutro 0 é chamado a sua *origem* e a *bola unitária* é $B(0;1)$, a bola fechada de raio 1 em volta da origem.

Exemplo 2.1. Seja $\mathbf{K}$ um corpo. Um *valor absoluto* em $\mathbf{K}$ é uma aplicação $|\cdot|\colon \mathbf{K} \to [0,\infty[$ com valores reais não-negativos tal que

- (Hausdorff) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,
- (Multiplicatividade) $|xy| = |x||y|$, e
- (Desigualdade Triangular) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Uma *norma* $\|\cdot\|$ para um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbf{K}$ com valor absoluto $|\cdot|$ é uma aplicação $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty[$ tal que

- $\|x\| = 0$ se, e tão-somente se, $x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para α em $\mathbf{K}$ e x em X, e
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Por exemplo, $X = \mathbf{K} \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}$. Toda norma induz uma métrica por $d(x,y) = \|x-y\|$.

A função distância d sobre um espaço vetorial X provém de uma norma $\|\cdot\|$, isto é, $d(x,y) = \|x-y\|$, se, e tão-somente se,

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y) \quad \text{e} \quad d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

Por exemplo, provém de nenhuma norma a função distância $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ sobre $\mathbb{R}$ para qualquer função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-linear monótona tal como $f = \arctan$.

Todos os exemplos alistados em [Con95, II.1] são desta forma induzida:

- Seja $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e defina $d(x,y) = |x-y|$. O espaço métrico $\mathbb{C}$, que se identifica com $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, será para nós o exemplo protótipo.

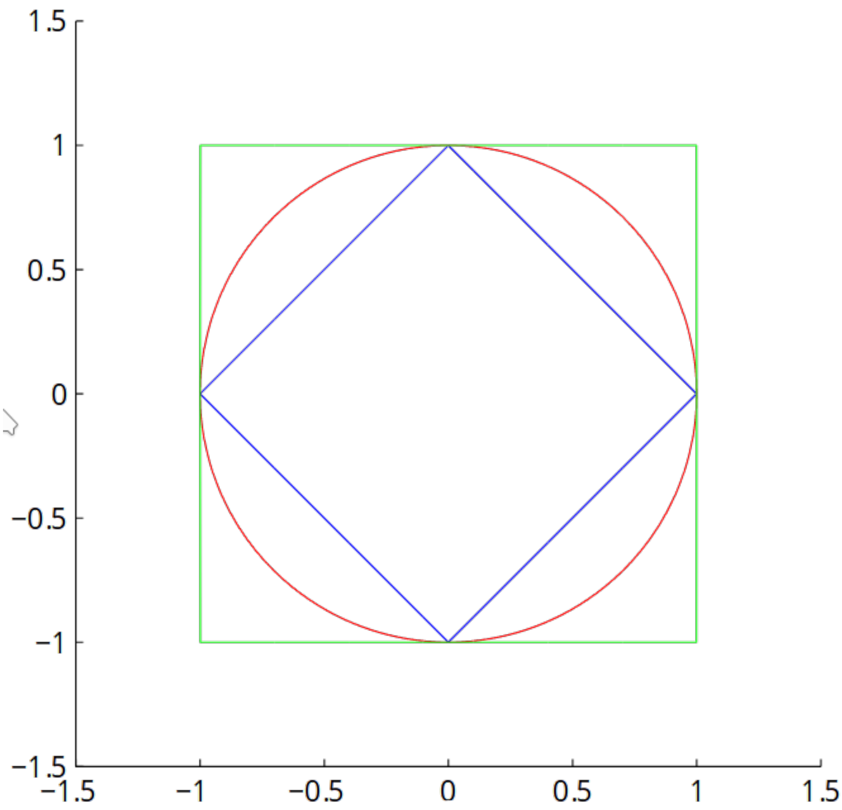

Figura 2.1: Comparação entre as bolas *unitárias* (isto é, cujo raio é 1) da norma euclidiana, da norma da soma e a norma do máximo no plano.

- Sobre $X = \mathbb{R}^n$, usualmente usa-se a *norma euclidiana*

$$\|x_1, \ldots, x_n\| := \sqrt[2]{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

  com $d(x, y) = \|x - y\|$

- Se X é um espaço métrico e $Y \subseteq X$, então Y (com a métrica restrita a $Y \times Y$) é um espaço métrico.

- Como o espaço $\mathbb{C}_\infty$ e a função $d\colon \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \to [0, \infty[$ em Seção 1.2 é o subespaço da esfera S em $\mathbb{R}^3$ com a métrica restrita, $\mathbb{C}_\infty$ é um espaço métrico.

- Em vez da norma euclidiana sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, podemos usar a soma

$$\|x, y\|_+ := |x| + |y|$$

com $d_+(x,y) = \|x-y\|_+$ cujas suas bolas são os quadrados cujos lados são paralelos às diagonais dadas por $y = x$ e $y = -x$ do plano;

- ou podemos usar o máximo

$$\|x,y\|_{\max} := \max\{|x|,|y|\}$$

com $d_{\max}(x,y) = \|x-y\|_{\max}$ cujas bolas são os quadrados cujos lados são paralelos ao eixo-x e ao eixo-y. Figura 2.1 compara as bolas para estas três distâncias diferentes no plano. Diferentes, mas afinal não tanto: faze Exercício 2.43!

- A função distância *trivial* sobre um conjunto X é dada por $d(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d(x,y) = 1$ caso contrário.

- Seja S um conjunto. Seja B(S) o conjunto de todas as funções $f\colon S \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) limitadas, isto é, tais que

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in S\} < \infty$$

com a métrica $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

- Seja $p \in \{2,3,5,7,11,\ldots\}$ um número primo e

$$|\cdot|_p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

a norma *p-ádica* definida por $|0|_p = 0$ e

$$|a|_p := p^{-v_p(a)}, \text{ onde } p^{v_p(a)} \text{ é a maior potência de } p \text{ que divide } a.$$

Por exemplo,

  – Para $p = 2$ temos que $|8|_2 = |2^3|_2 = 2^{-3}$ e $|9|_2 = |9 \cdot 2^0|_2 = 2^{-0} = 1$;
  – para $p = 3$ temos que $|8|_3 = |3^0 \cdot 8|_3 = 3^{-0} = 1$ e $|9|_3 = |3^2|_3 = 3^{-2}$.

A norma p-ádica $|\cdot|_p$ mede quantas vezes p aparece na fatoração de um número inteiro. Por incrível que pareça para quem se acostumou à norma usual, a norma p-ádica *diminui* quando a potência de p *cresce*; um número inteiro grande (com respeito à norma usual) pode ter norma p-ádica pequena.

Apesar da sua natureza aparentemente exótica, Teorema F.3 mostra que as únicas normas sobre $\mathbb{Q}$ são a norma usual e as normas p-ádicas.

Os números p-ádicos são relativamente recentes, em comparação aos números reais; foram introduzidos há cerca de cem anos por Kurt Hensel: Em analogia a $\mathbb{R}$, que consiste de todos os limites de $\mathbb{Q}$ para a norma usual $|\cdot|$, vamos definir $\mathbb{Z}_p$ como o conjunto dos limites de $\mathbb{Z}$ para a norma p-ádica $|\cdot|_p$. Formalmente, $\mathbb{Z}_p$ é o *completamento* de $\mathbb{Z}$ para $|\cdot|_p$.

A *métrica p-ádica* é $\mathrm{d}_p(x,y) := |x-y|_p$. O anel normado dos *números p-ádicos inteiros* é definido por

$$\mathbb{Z}_p := \text{ o completamento de } \mathbb{Z} \text{ com respeito à métrica } p\text{-ádica } \mathrm{d}_p \;.$$

(Vide Teorema A.1 para a noção do complemento de um espaço métrico; o exemplo protótipo é $\mathbb{R}$, o completamento de $\mathbb{Q}$.)

Em particular, como $|p^n|_p = p^{-n}$ e $|a_n|_p = 1$ para a_n em $\{1,\ldots,p-1\}$, vale $|a_n p^n|_p = p^{-n}$ e

$$|a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \cdots + a_{\mathrm{N}} p^{\mathrm{N}}|_p = p^{-n} \to 0 \quad \text{para } n \to \infty.$$

Isto é, a sequência $(a_0, a_0 + a_1 p, a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots)$ é Cauchy. Como $\mathbb{Z}_p$ é completo, ela converge, isto é, a série infinita $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$ converge. Isto é, em $\mathbb{Z}_p$, todo número $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$ existe como limites de números em $\mathbb{Z}$, como em $\mathbb{R}$ todo número $b = b_0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \cdots$ para b_0, b_1, ... em $\{0,1,\ldots,9\}$ existe como limites de números em $\mathbb{Q}$.

A árvore binária da Figura F.1 representa $\mathbb{Z}_2$ da seguinte maneira: Cada número p-ádico tem uma expansão p-ádica dada pelos seus coeficientes, sendo ou 0, ou 1, e conforme a estes coeficientes, pega, ou o ramo da esquerda, ou o da direita em uma bifurcação (ou nó) da árvore.

Reflitamos como se descreve o valor absoluto, a função distância e as bolas sobre eles:

- Vale $\mathrm{d}(x,y)_p = |x-y|_p = p^{-v}$ onde v = o nível em que os dois ramos infinitos x e y bifurcam; em particular, vale $|x|_p = p^{-v}$ onde v = o nível da primeira bifurcação em que o ramo infinito vai à direita.
- Uma bola corresponde a uma malha da árvore por $\mathrm{B}(x, p^{-n}) \mapsto x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ se $x = x_0 + x_1 p + \cdots$, onde $\mathrm{B}(x, p^{-n})$ é a bola com centro x e raio p^{-n} e $x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ é o ramo finito que leva à malha; a bola é dada por todos os ramos infinitos que passam pela malha correspondente. Observamos que duas bolas, ou se incluem, ou são disjuntas! Isto é, em termos topológicos, $\mathbb{Z}_p$ é *totalmente desconexo.*

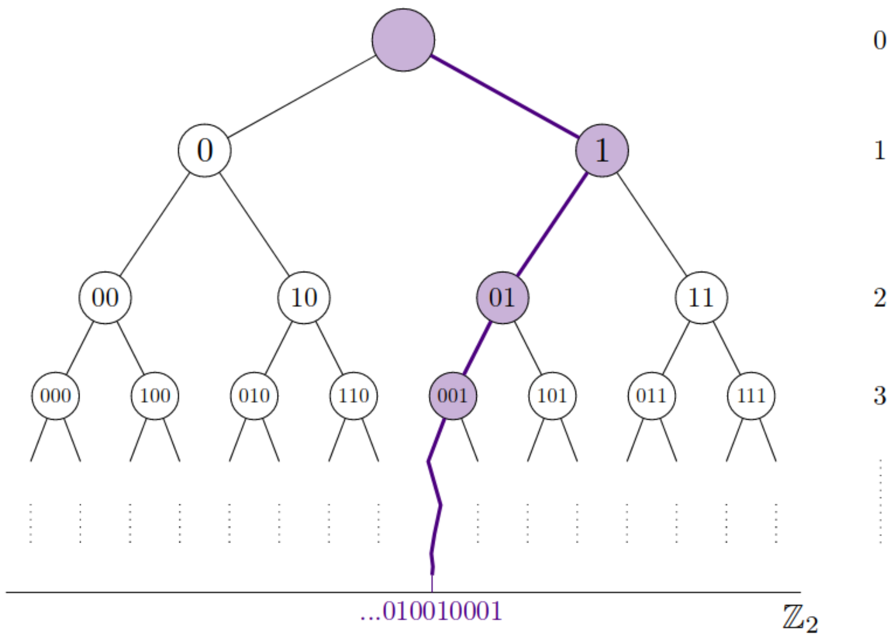

Figura 2.2: A árvore binária que representa $\mathbb{Z}_2$

Exercício 2.2 (Operações sobre dadas métricas para obter novas métricas). Mostra:

(i) Se d' é uma métrica e $\alpha > 0$, então $d = \alpha\, d'$ é uma métrica!

(ii) Se d' e d'' são métricas, então $d = d' + d''$ é uma métrica!

(iii) Se d' e d'' são métricas, então $d = d' \cdot d''$ é uma métrica!

(iv) Se d é uma métrica, então $\frac{1}{1+d} = 1 - \frac{1}{1+d}$ é uma métrica!

2.1. Topologia

Seja X um espaço métrico.

Definição 2.3. Um conjunto G dentro de X é *aberto* se para todo g em G existe uma bola aberta B dentro de G com centro g .

Observação 2.4. Como o raio de uma bola é > 0, toda bola fechada contém uma bola aberta, e vice-versa. Logo, se um conjunto contém uma bola, então contém tanto uma bola fechada quanto uma bola aberta. Portanto, é desnecessário especificar em Definição 2.3 se a bola é aberta ou fechada.

Contudo, naturalmente prefere-se que seja aberta, mais explicitamente: G é *aberto* se para todo g em G existe um raio $\epsilon > 0$ tal que $B(g, \epsilon) \subseteq G$.

Cautela: Logo, um conjunto G é aberto se é união de (uma quantidade arbitrária de) bolas (por exemplo, da coleção das em volta de cada ponto g em G). Porém, se G é a união de bolas, então, em geral, G é aberto se, e tão-somente se, toda bola é aberta!

Para dar um contra-exemplo, qualquer bola fechada em $X = \mathbb{R}$ é a união de uma singela bola, mas não é aberta como mostram os pontos no bordo. (Porém, por exemplo, em $X = \mathbb{Z}_p$, toda bola fechada é também aberta e, com efeito, G é aberto se, e tão-somente se, é união de bolas.)

Proposição 2.5. *Os subconjuntos abertos de* X *satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) *Os subconjuntos* X *e* $\emptyset$ *são abertos.*

(ii) *Se* $G_1, \ldots, G_n$ *são abertos, então* $G_1 \cap \ldots \cap G_n$ *é aberto.*

(iii) *Se todos os* G_i *para* i *em* I *são abertos, então* $\bigcup_{i \in I} G_i$ *é aberto.*

Demonstração: Ad (i): Toda bola é contida em X.

Ad (ii): Se $G_1, \ldots, G_n$ são abertos e g em $G = G_1 \cap \ldots \cap G_n$, então G contém a bola em torno a x cujo raio é o mínimo dos raios das bolas contidas em G_1, $\ldots$, G_n.

Ad (iii): Como cada G_i é a união de bolas abertas, então a união G das uniões G_i de bolas abertas é uma união de bolas abertas. Logo, G é aberto. □

Observação. Cautela, é importante que a interseção seja finita em (ii)! Caso contrário, a interseção infinita das bolas abertas $B(0, \frac{1}{n})$ para $n \in \mathbb{N}$, sendo $\{0\}$, não é aberta!

Uma coleção de subconjuntos que satisfazem as propriedades de Proposição 2.5 chama-se *topologia* e os seus elementos *abertos*. Isto é, Proposição 2.5 diz que toda métrica sobre X induz uma topologia sobre X. Uma tal topologia

- é *Hausdorff* (ou *satisfaz o axioma de separação* T_2), isto é, para dois pontos diferentes x e y existem dois conjuntos abertos disjuntos $U \ni x$ e $V \ni y$, e

- satisfaz o *Primeiro Axioma de Enumerabilidade*: Todo ponto tem *uma base* enumerável. Isto é, para todo $x \in X$ existe uma coleção *enumerável* $\mathcal{B}$

de conjuntos abertos que contêm x tal que cada conjunto aberto $U \ni x$ contém um $B \in \mathcal{B}$. (Se a topologia é a de um espaço métrico, uma tal base é dada por $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n})\}$.)

Quando uma topologia é metrizável, isto é, quando provém de uma métrica?

Teorema (Lema de Urysoh). *Seja* X *um espaço topológico. Se* X *é Hausdorff e satisfaz o* Primeiro Axioma de Enumerabilidade*, então são equivalentes:*

- *é* metrizável*, isto é, a topologia provém de um métrica,*
- *é* regular *ou* satisfaz o axioma de separação T_3*, isto é, para todo subconjunto fechado* A *e* $x \notin A$ *existem subconjuntos abertos disjuntos* $U \supseteq A$ *e* $V \ni x$.
- *é* normal *ou* satisfaz o axioma de separação T_4*, isto é, para todo par de subconjuntos fechado* A *e* B *existem subconjuntos abertos disjuntos* $U \supseteq A$ *e* $V \supseteq B$.

Nem toda topologia provém de uma métrica: Por exemplo:

- A topologia *co-finita* cuja base consiste de todos os subconjuntos (de um conjunto infinito) cujo complemento é finito: não provém de uma métrica porque não é Hausdorff.
- A topologia de *Sorgenfrey* sobre $\mathbb{R}$ cuja base consiste de todos os intervalos semiabertos (ou todos do tipo $[a, b[$, ou todos do tipo $]a, b]$): não provém de uma métrica porque nenhum ponto tem uma base enumerável.

Definição 2.6. Um conjunto F em X é *fechado* se $X - F$ é aberto.

Proposição 2.7 (O complemento a Proposição 2.5). *Os subconjuntos fechados de* X *satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) *Os conjuntos* X *e* $\emptyset$ *são fechados.*

(ii) *Se* $F_1, \ldots, F_n$ *são fechados, então* $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ *é fechado.*

(iii) *Se todos os* F_i *para* i *em* I *são fechados, então* $\bigcap_{i \in I} F_i$ *é fechado.*

Demonstração: Chamemos a operação $X - \cdot$ entre subconjuntos de X a operação do complemento. Usa

- Proposição 2.5,

- que, por definição, todo conjunto fechado é o complemento de um conjunto aberto, e

- que a operação do complemento troca $\cup$ com $\cap$! $\square$

Observação. Cautela, é importante que a união seja finita em (ii)! Caso contrário, a união infinita das bolas fechadas $\bar{B}(0, 1 - \frac{1}{n})$ para $n \in \mathbb{N}$, send $B(0,1)$, não é fechada! Mais, qualquer conjunto é a união disjunta dos conjuntos unitários dados pelos seus pontos, que são todos fechados:

$$G = \dot{\bigcup}\{\{g\} : g \in G\}.$$

Definição 2.8. Seja $A \subseteq X$. O *interior* A° de A é

$$A^\circ := \bigcup\{B \subseteq A : B \text{ aberto }\}$$

e o *fecho* A^- de A é

$$A^- := \bigcap\{B \supseteq A : B \text{ fechado }\}.$$

O bordo ∂A é

$$\partial A := A^- - A^\circ.$$

Possivelmente, $A^\circ = \emptyset$ e $A^- = X$. O interior é aberto e o fecho fechado.

Exemplo 2.9. O interior de uma bola fechada $\bar{B}(x,\epsilon)$ é a bola aberta $B(x,\epsilon)$. O fecho de uma bola aberta $\bar{B}(x,\epsilon)$ é a bola fechada $\bar{B}(x,\epsilon)$. O bordo de uma bola (fechada ou aberta) com centro x e raio $r > 0$ é o círculo $\{y \in X : d(x,y) = r\}$.

Proposição 2.10. *Seja* A *um subconjunto em* X.

(i) A *é aberto se, e tão-somente se,* $A^\circ = A$

(ii) A *é fechado se, e tão-somente se,* $A^- = A$

(iii) $A^\circ = X - (X - A)^-$ *e* $A^- = X - (X - A)^\circ$.

(iv) *Para* A *e* B *subconjuntos,* $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$.

(v) $x \in A^\circ$ *se, e tão-somente se,* A *contém uma bola em torno a* x.

(vi) $x \in A^-$ *se, e tão-somente se,* A *intersecta toda bola em torno a* x.

Demonstração: Ad (i): observe a definição de A° como máximo subconjunto aberto em A

Ad (ii): observe a definição de A^- como mínimo subconjunto fechado que contém A.

Ad (iii): Como em Proposição 2.7, usa

- que, por definição, todo conjunto fechado é o complemento de um conjunto aberto, e
- que a operação do complemento troca $\cup$ com $\cap$!

e vice-versa.

Ad (iv): O conjunto $(A \cup B)^-$ é fechado e contém A e contém B; logo, contém A^- e B^-; isto é, contém $A^- \cup B^-$.

Vice-versa, $A^- \cup B^-$ é fechado e contém A e B; isto é, contém $(A \cup B)$; logo contém $(A \cup B)$.

Ad (v): Se x em A°, então, como A° é aberto, existe uma bola em torno a x em A°, em particular, em A. Se A contém uma bola B em torno a x, então $A^\circ \supseteq B$; logo x em A°.

Ad (vi): Temos x em $A^- = X - (X - A)^\circ$ se, e tão-somente se, $x \notin (X - A)^\circ$. Logo, por (v), se, e tão-somente se, nenhuma bola em torno de x é contida em $X - A$, se, e tão-somente se, toda bola em torno de x intersecta A. □

Lembremo-nos de Observação 2.4: como o raio de uma bola é sempre > 0, toda bola fechada contém uma bola aberta, e vice-versa. Logo, se um conjunto contém uma bola, então contém tanto uma bola fechada quanto uma bola aberta. Portanto não importa especificar se a bola seja aberta ou fechada em Proposição 2.10.(v) e (vi).

Definição 2.11. Um subconjunto A em X é *denso* se $A^- = X$.

Equivalentemente, se toda bola em X intersecta A. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

Exercício 2.12. Mostra que $\mathbb{C}_\infty$ é um espaço métrico!

2.2. Sequências e Completude

Seja X um espaço métrico.

Definição 2.13. Uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X *converge ao limite* x se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Isto é, para qualquer ϵ arbitrariamente pequeno *quase todos* os membros (= todos exceto um número finito) de (x_n) estão em $B(x, \epsilon)$. Denote $\lim x_n = x$ ou $x_n \to x$ que (x_n) converge a x.

Observe que $x_n \to x$ se, e tão-somente se, $d(x_n, x) \to 0$.

O limite é único: Se y é outro limite de x_n, então $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$; logo $d(x,y) = 0$, isto é, $x = y$.

Exemplo 2.14 (Arquimedes e a tartaruga). Desenhemos a seguinte corrida entre Arquimedes e uma tartaruga:

- Arquimedes corre com uma velocidade momentânea de 1m/s, a tartaruga com 1dm/s, um décimo da de Arquimedes, mas tenha 1m de vantagem.
- Após 1s, Arquimedes percorreu 1m, e a tartaruga 1,1m, uma vantagem de 1dm.
- Após 1,1s, Arquimedes percorreu 1,1m, e a tartaruga 1,11m, uma vantagem de 1cm.
- Após 1,11s, Arquimedes percorreu 1,11m, e a tartaruga 1,111m, uma vantagem de 1mm.

Arquimedes nunca alcançará a tartaruga? A solução é que sim, após 1,11111 . . . segundos, o que não é infinito ∞, isto é, nunca, mas um número real, o *limite* da sequência $1 + 1/10 + 1/100 + \ldots = 10/9$, o ponto em que Arquimedes é à altura da tartaruga (= a interseção da reta de Arquimedes com a da tartaruga).

Exemplo 2.15 (Juros compostos). Ponhamos o nosso dinheiro em uma conta de poupança de um banco generoso, 100 reais por 100 dias com uma taxa de juros de 100%. Logo, teremos após 100 dias 200 reais na conta.

Agora proponhamos ao banco, no lugar de 100% uma única vez, pague 10% dez vezes, isto é após cada décimo dia um décimo dos juros. Logo, teremos

- após 10 dias $110 = 100 \cdot (1{,}1)$ reais na conta,
- após 20 dias $110 \cdot (1{,}10) = 121 = 100 \cdot (1{,}1)^2$ reais na conta, . . . e
- finalmente, após 100 dias $100 \cdot (1{,}1)^{10} = 100 \cdot 2{,}5937424601 \approx 259$ no lugar de 200 reais na conta!

Tornamo-nos arbitrariamente ricos, ao diminuirmos os intervalos de pagamento mais e mais? Não! Se o banco pagasse, por exemplo, os juros (compostos) em 1.000.000 de intervalos, isto é, quase cada segundo, teríamos

$$100 \cdot (1{,}0000001^{1.000.000}) \approx 100 \cdot 2{,}71828 = 271{,}828$$

reais na conta. Isto é, observamos que a sequência $(1 + 1/n)^n$ converge ao *número de Euler* $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$!

Dado um subconjunto A em X, um ponto x em X é *ponto de aderência* de A se ele é limite de uma sequência em A. Por exemplo, todos os pontos em A são pontos de aderência, mas pode ter mais, necessariamente pontos de acumulação; por exemplo, os pontos no bordo $\{x \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(x, a) = \epsilon\}$ de uma bola aberta $\mathrm{A} = \mathrm{B}(a, \epsilon)$ são pontos de aderência de A que não pertencem a A.

Um ponto x em X é um *ponto de acumulação* (ou *ponto de limite*) se é o limite de uma sequência (x_n)

- cujos membros x_n são todos diferentes, ou
- equivalentemente, tal que $\{x_n\}$ é infinito, ou
- equivalentemente, tal que $x \notin \{x_n\}$.

Um ponto x não é um ponto de acumulação, é um *ponto isolado*, se o conjunto unitário $\{x\}$ é aberto.

Um ponto de acumulação a de uma sequência a_1, a_2, ... (pontos ordenados na reta) na reta $\mathbb{R}$ é um ponto na reta tal que todos os pontos da sequência se acumulem em torno de a. Isto é, quanto mais avançamos na sequência, tanto menor o número de pontos fora de um pequeno intervalo em volta de x. Mais exatamente, em cada intervalo $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ arbitrariamente pequena em torno de a estão todos os pontos da sequência, exceto um número finito; vê Figura 2.3 para o exemplo $a_n = 1/n$ na vizinhança de $a = 0$.

Uma sequência (de números reais) $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ converge a um *limite* a, se para qualquer distância (que pode ser arbitrariamente pequena) $\varepsilon > 0$ vale $|a - a_n| < \varepsilon$ a partir de um índice n_0 (isto é, para todos os $n \geq n_0$).

Para ganhar um intuito, marca os pontos das primeiras entradas de umas sequências convergentes na reta, por exemplo, as entradas para $n = 1$, 2, 5, 10, 1000, ... das sequências discutidas acima:

- A sequência $1 + 1/10 + 1/10^2 + \cdots \to 10/9$.

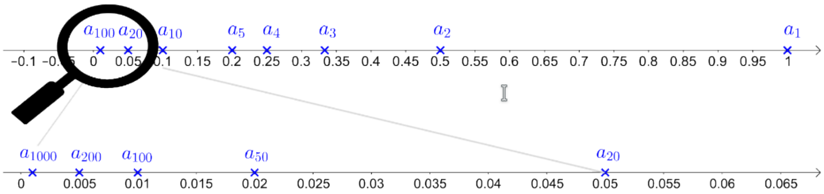

Figura 2.3: O limite como ponto de acumulação na reta

- A sequência $(1+1/n)^n \to e$.

Proposição 2.16. *Um conjunto* F *é fechado em* X *se, e tão-somente se, o limite de toda sequência em* F *que converge (a um elemento, a priori, em* X*) é em* F.

Demonstração: Por contraposição:

Se existe uma sequência (x_n) em F cujo limite $x \in \mathrm{X} - \mathrm{F}$, então toda bola em torno de x intersecta F; isto é, x mostra que X − F não é aberto, isto é, que F não é fechado.

Vice-versa, se X − F não é aberto, isto é, existe um $x \notin \mathrm{F}$ tal que toda bola em torno de x intersecta F, então pega x_n em $\mathrm{B}(x, \frac{1}{n}) \cap \mathrm{F}$ para todo n em $\mathbb{N}$. Por construção (x_n) em F e $x_n \to x \notin \mathrm{F}$. □

Exercício 2.17.

(i) Para todo $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$,

$$\mathrm{A}^- = \{ \text{ todos os limites (em X) de sequências de A} \}.$$

Dica: Um subconjunto B é fechado se, e tão-somente se, B contém todos os limites de sequências em B; em particular, A^- contém o lado direito. Temos $a \in \mathrm{A}^-$ se, e tão-somente se, toda bola em torno de a intersecta A; Em particular, toda bola de forma $\mathrm{B}(a, \frac{1}{n})$ contém um elemento a_n em A; logo $a_n \to a$; isto é, A^- é contido no lado direito.

(ii) Para todo $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$,

$$\mathrm{A}^- = \mathrm{A} \cup \{ \text{ todos os pontos de acumulação (em X) de (sequências de) A} \}.$$

Dica: Usa que um limite a é um ponto de acumulação se, e tão-somente se, é um limite de uma sequência (a_n) tal que $a \notin \{a_n\}$.

(iii) Um conjunto é fechado se, e tão-somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

(iv) Um conjunto A sem pontos de acumulação (em X) é fechado.

Uma piada matemática mnemónica: Como se fecha uma porta aberta? Pelo acréscimo dos seus pontos de acumulação!

Definição. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico é dita de *Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos os $n, m > \mathrm{N}$.
Um espaço métrico é *completo* se toda sequência de Cauchy converge.

Por exemplo, $\mathbb{R}$ é completo.
Notemos que, para uma sequência,

- enquanto a sua *convergência* pode ser definida em qualquer *espaço topológico*, isto é, um conjunto com qualquer coleção de subconjuntos, ditos *abertos*, que satisfaz Proposição 2.5,
- a propriedade *de Cauchy* necessita uma métrica.

O quadro mais geral para falar de sequências de Cauchy é o de um *espaço uniforme*, moralmente, um conjunto com uma coleção de (semi-)métricas (isto é, $\mathrm{d}(x,y) = 0$ não necessariamente implica $x = y$).

Observação. Toda sequência que converge é Cauchy.

Exercício 2.18.

(i) Se (X', d') e (X'', d'') são espaços métricos completos, então o espaço métrico $\mathrm{X} = \mathrm{X}' \times \mathrm{X}''$ com $\mathrm{d} = \mathrm{d}' + \mathrm{d}''$ é completo.

(ii) Se $\mathrm{X}', \mathrm{X}'' = \mathbb{R}$ com as métricas $\mathrm{d}'(x,y) = |x - y| = \mathrm{d}''(x,y)$, mostra que a função distância euclidiana é *Cauchy-equivalente* a d de X, isto é, uma sequência é Cauchy para a métrica euclidiana se, e tão-somente se, é Cauchy para a função distância d.

(iii) Em particular, $\mathbb{C}$ é completo.

Considera a projeção estereográfica $\mathbb{C}_\infty$ de $\mathbb{C}$: Toda sequência (z_n) tal que $z_n \to \infty$ converge em $\mathbb{C}_\infty$, mas não em $\mathbb{C}$. Moralmente $\mathbb{C}_\infty$ "completa" $\mathbb{C}$ pelo acréscimo de um ponto de acumulação no infinito.

Definição 2.19. O *diâmetro* de um subconjunto A em um espaço métrico X é dado por
$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}.$$

Observação. Se A é fechado e $\operatorname{diam} A < \infty$, então o diâmetro de A é a maior distância entre os pontos em A.

Exercício 2.20. Seja A um conjunto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Vale
$$\operatorname{diam}(A) = \inf\{\operatorname{diam}(B) : B \supseteq A \text{ disco }\}?$$

(ii) Caso não valha, qual é a constante mínima $C > 1$ tal que
$$C \cdot \operatorname{diam}(A) \geq \inf\{\operatorname{diam}(B) : B \supseteq A \text{ disco }\}.$$

Dica. Considera um triângulo equilátero!

Exercício 2.21. Seja A um conjunto em $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Mostra
$$\operatorname{diam}(A) = \inf\{\operatorname{diam}(B) : B \supseteq A \text{ disco }\}.$$

Dica. Como $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(A^-)$ para A^- o fecho de A, podemos supor A fechado. É suficiente mostrar que existe um disco B de diâmetro diam(A) que contém A: Como A é fechado e é contido em um disco, o qual é em particular compacta, segue que A é compacto. Logo, existem pontos a' e a'' em A cuja distância entre eles é
$$d(a', a'') = \operatorname{diam}(A)$$
Seja B um disco com a' e a'' no seu bordo. Para todo ponto fora do disco, uma das duas distâncias, ou a distância dele ao ponto a', ou a dele ao ponto a'', é pela desigualdade triangular forte maior do que o diâmetro do bolo. Isto é, por definição do diâmetro como distância máxima entre os pontos de A, todos os pontos fora de B estão fora de A; isto é, A é contido em B.

No seguinte Teorema de Cantor, podemos pensar de X como a reta $\mathbb{R}$ e dos subconjuntos fechados como intervalos fechados $F_n = [a_n, b_n]$ encaixados. Que a reta é completa equivale a que a interseção $\bigcap F_n$ contém um único ponto.

Teorema 2.22 (Teorema de Cantor). *Um espaço métrico* X *é completo se, e tão-somente se, para toda coleção de subconjuntos fechados* $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ *com* $\operatorname{diam} F_n \to 0$, *a sua interseção* $\bigcap F_n$ *contém um único elemento.*

Demonstração: $\Longrightarrow$: Seja X completo e sejam dados subconjuntos fechados $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ com $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Se escolhemos x_n em F_n, então (x_n) é Cauchy; logo, $x_n \to x$ para algum x em X. Como todo F_n é fechado e $x_n \to x$, por Proposição 2.16, todo $F_n \ni x$. Isto é, $\bigcap F_n \ni x$. Para qualquer y em $\bigcap F_n$, como $\operatorname{diam} F_n \to 0$, também $d(x_n, y) \to 0$; logo $y = \lim x_n = x$. Isto é, $\bigcap F_n = \{x\}$.

$\Longleftarrow$: Seja X um espaço métrico tal que a interseção de toda sequência de subconjuntos fechados $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ com $\operatorname{diam} F_n \to 0$ contém um único elemento, e seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Para todo N, seja n tal que $d(x_{n'}, x_{n''}) < \frac{1}{N}$ para todos os n', $n'' \geq n$. Logo, os fechos $F_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}^-$ são conjuntos com $\operatorname{diam} F_n \leq \frac{1}{N} \to 0$. Logo, existe x em $\bigcap F_n$, e $x_n \to x$. □

Exercício 2.23 ([Con95, Comentário após Teorema II.3.7]). Verifiquemos que cada uma das condições para os subconjuntos F_1, F_2, ... em Teorema 2.22 é indispensável, por construirmos subconjuntos F_1, F_2 ... de $\mathbb{R}$ que satisfaçam todas exceto uma das três condições seguintes

- são todos fechados,
- $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$, e
- $\operatorname{diam} F_n \to 0$,

e mostrarmos que a sua interseção $\bigcap F_n$

- ou é vazia,
- ou contém mais de um elemento.

Seja $\mathscr{C}$ uma coleção de subconjuntos de um espaço métrico X. Ela tem

- a *Propriedade de Interseções Finitas* ou a *PIF*, se para todos $C_1, \dots, C_n$ em $\mathscr{C}$ a sua interseção $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$.
- *conjuntos pequenos* se para todo x em X e $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança C em $\mathscr{C}$ de x com $\operatorname{diam} C < \epsilon$.

Exercício 2.24. Mostra a seguinte generalização do Teorema de Cantor: Um espaço métrico X é completo se, e tão-somente se, para toda coleção $\mathscr{F}$ de subconjuntos fechados em X que tem a PIF e conjuntos pequenos, a sua interseção total $\bigcap \mathscr{F}$ contém um único elemento.

Corolário 2.25. *Seja* X *um espaço métrico completo e* $Y \subseteq X$. *O espaço métrico induzido* Y *é completo se, e tão-somente se,* Y *é fechado.*

Demonstração: Se Y é fechado, então pelo Teorema de Cantor Y é completo.

Seja Y completo. Toda sequência que converge é Cauchy, logo, por Y ser completo, o seu limite existe em Y, logo Y é fechado por Proposição 2.16. □

Exercício 2.26.

(i) Mostra que $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} A^-$

(ii) Se (x_n) é uma sequência de Cauchy e tem uma subsequência convergente (x_{n_k}), então (x_n) converge.

(iii) Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{C}$ e x em $\mathbb{C}$.

(a) Mostra que $x_n \to x$ em $\mathbb{C}$ (para a topologia euclidiana) se, e tão-somente se, $x_n \to x$ em $\mathbb{C}_\infty$ (para a topologia de $\mathbb{S}^2$)!

(b) Mostra que se $|x_n| \to \infty$ em $\mathbb{C}$, então (x_n) é Cauchy em $\mathbb{C}_\infty$!

(c) Se $|x_n| \to \infty$ em $\mathbb{C}$, então (x_n) converge em $\mathbb{C}_\infty$?

2.3. Funções Contínuas

Sejam (X, d) e (Ω, ρ) espaços métricos e $f : X \to \Omega$. Seja a em X e ω em Ω.

Definição 2.27. A função f *tem limite* ω em a, denotado por $\lim_{x\to a} f(x) = \omega$, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x em X, se $d(x, a) < \delta$ então $\rho(f(x), \omega) < \epsilon$.

Ela é *contínua em a* se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ela é *contínua* se é contínua em todos os pontos.

Observemos que a primeira condição $\lim_{x\to a} f(x) = \omega$ não é vazia se, e tão-somente se, a é ponto de acumulação.

Exemplo 2.28.

- Todas as operações aritméticas + e $\cdot$, − e $\cdot^{-1}$ são contínuas.
- Toda função linear sobre um espaço vetorial finito é contínua.
- Todo polinómio é contínuo.
- Todas as funções especiais como exp, log, sin, cos, tan, arctan ...

Proposição 2.29. *Sejam* (X, d) *e* (Ω, ρ) *espaços métricos e* $f : X \to \Omega$. *Seja* a *em* X *e* $\alpha = f(a)$ *em* Ω. *São equivalentes as seguintes condições:*

(i) *A função f é contínua em a.*

(ii) *A pré-imagem de toda bola aberta em torno de* α *contém uma bola aberta em torno de a.*

(iii) *Para toda sequência (x_n), se $x_n \to a$, então $f(x_n) \to$* α.

Demonstração: (i) $\implies$ (ii): Se f é contínua em a, então, com a notação em Definição B.3, a pré-imagem de toda bola $B(f(a), \epsilon)$ contém a bola $B(a, \delta)$.

(ii) $\implies$ (iii): Seja O em Ω uma bola em torno de α. Pela hipótese, existe uma bola B em torno de x contida em $f^{-1}O$. Como $x_n \to x$, esta bola B contém quase todos (isto é, todos exceto um número finito) membros de (x_n). Logo O contém quase todos os membros de $(f(x_n))$; isto é, $f(x_n) \to f(x) = \alpha$.

(iii) $\implies$ (i): Por contraposição: Seja a em X e $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe x em X tal que $d(x, a) < \delta$ e $d(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. Em particular, para todo $\delta = \frac{1}{n}$ existe x_n tal que $d(x, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Logo $x_n \to a$, mas $f(x_n) \not\to f(a)$. □

Proposição 2.30. *Sejam* (X, d) *e* (Ω, ρ) *espaços métricos e* $f : X \to \Omega$. *São equivalentes as seguintes condições:*

(i) *A função f é contínua.*

(ii) *A pré-imagem sob f de todo subconjunto aberto é aberta.*

(iii) *A pré-imagem sob f de todo subconjunto fechado é fechada.*

Demonstração: Por definição, um conjunto G é aberto, se, e tão-somente se, para todo g em G existe uma bola em torno de g. Por Proposição B.5, uma função f é contínua se, e tão-somente se, a pré-imagem de toda bola O em Ω contém uma bola B em X à volta de x.

(i) $\implies$ (ii): Se f é contínua e Δ é um subconjunto aberto em Ω , então, para todo x em $D = f^{-1}\Delta$, existe uma bola B em X à volta de x; isto é, D é aberto.

(ii) $\implies$ (i): Se O uma bola em Ω, então $f^{-1}O$ é aberto, em particular, contém uma bola B em X à volta de x.

(ii) $\iff$ (iii): A pré-imagem de um complemento é o complemento da pré-imagem. □

Definição 2.31. Dois espaços topológicos são *homeomórficos* se existem duas aplicações f e g contínuas e *mutuamente inversas* entre eles, isto é, tais que $g \circ f = \mathrm{id} = f \circ g$.

Exercício 2.32. Mostra que duas topologias τ e σ sobre o mesmo conjunto X são iguais se, e tão-somente se, a identidade entre os espaços topológicos (X,τ) e (X,σ) é um homeomorfismo.

Proposição 2.33. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Se f e g são contínuas, então a sua composição $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

Demonstração: Se U é um subconjunto aberto em Z, então $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto por Proposição B.6. □

Corolário 2.34. *O conjunto das funções contínuas sobre um domínio (comum) com valores em $\mathbb{C}$ é uma* álgebra *sobre $\mathbb{C}$; isto é, se f e g são contínuas, então $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas, e (em particular) se $\lambda \in \mathbb{C}$, então λf é contínua.*

Demonstração: Mostra:

1. Se f e g são contínuas, então a função $(f,g) : X \to Y \times Y$ dada por $x \mapsto f(x), g(x)$ é contínua para a métrica d_{max} sobre o produto $Y \times Y$!

2. A adição e multiplicação $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para a métrica d_{max} (sobre o seu mesmo domínio) são contínuas!

Aplica Proposição 2.33! □

Exercício 2.35.

(i) Mostra que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-nula que é contínua, aditiva e multiplicativa (isto é, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(a)f(b)$) é a identidade!

(ii) Mostra que toda função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ não-nula que é contínua, aditiva e multiplicativa ou é a identidade, ou é a conjugação complexa!

(iii) Mostra que a condição da continuidade de f sobre $\mathbb{R}$ é *dispensável* para a conclusão em (i), usando, por exemplo, que
   1. o valor de f em todo número positivo (que é um quadrado) é positivo,
   2. logo f é monotonamente crescente,
   3. logo f é continua.

(iv) Mostra pelo Lema de Zorn, vide Teorema E.2, que todo automorfismo de qualquer subcorpo de $\mathbb{C}$ se estende a $\mathbb{C}$; em particular, a condição da continuidade de f sobre $\mathbb{C}$ é *indispensável* para a conclusão em (ii)!

Dica: Define a relação $g \geq f$ entre homomorfismos sobre subcorpos de $\mathbb{C}$ por g estende f, e mostra que ela satisfaz as condições do Lema de Zorn para obter um elemento máximo F (semelhante à sua aplicação em Apêndice E.2). Para mostrar que o domínio D de F é $\mathbb{C}$, mostra que, dado x em $\mathbb{C} - \mathrm{D}$, existe uma extensão G de F cujo domínio inclui x.

2.4. Funções Uniformemente Contínuas

Definição. Uma aplicação f entre espaços métricos é ***uniformemente contínua*** se

$$\text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } \mathrm{d}(x,y) < \delta \text{ implica } \mathrm{d}(f(x),f(y)) < \epsilon$$

para todo x, y. Uma aplicação f entre espaços métricos é ***Lipschitziana*** se

$$\text{existe uma constante } \mathrm{M} > 0 \text{ tal que } \mathrm{d}(f(x),f(y)) < \mathrm{M} \cdot \mathrm{d}(x,y)$$

para todo x, y.

Observemos que se f é Lipschitziana, então é uniformemente contínua para $\delta = \frac{\epsilon}{\mathrm{M}}$.

Enquanto a definição de uma aplicação contínua é possível sem falar de uma métrica, mas apenas de topologia, para a definição de uma aplicação *uniformemente contínua* é indispensável que o seu domínio e contra-domínio sejam espaços métricos.

Exemplo.

- Qualquer polinómio, por exemplo, x^2, fornece uma função contínua. Esta é *uniformemente contínua* sobre uma bola fechada de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; mas não sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ inteiro!

- A radiciação $\sqrt[2]{x}$ sobre $[0, \frac{1}{n}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uniformemente contínua, mas não é Lipschitziana! (Como a sua derivada é ilimitada à volta de 0.)

- Toda função linear é contínua se, e tão-somente se, é Lipschitziana.

Se existem aplicações mutuamente inversas

- *contínuas* entre dois espaços topológicos X e Y, isto é, são homeomórficos, então têm as mesmas propriedades (por exemplo, X é conexo [vide Seção 2.5] se, e tão-somente se, Y é conexo),
- *lineares* entre dois espaços vetoriais X e Y, isto é, são isomórficos, então têm as mesmas propriedades (por exemplo, X é de dimensão finita se, e tão-somente se, Y é de dimensão finita), e
- *uniformemente contínuas* entre dois espaços métricos X e Y, então têm as mesmas propriedades (por exemplo, X é completo se, e tão-somente se, Y é completo).

Por exemplo, exp e log são homeomorfismos entre $\mathbb{R}$ e $]0,\infty[$, mas enquanto $\mathbb{R}$ é completo, $]0,\infty[$ não é completo.

Definição. Para um subconjunto A de X define a função distância $d(\cdot, A)$ a A sobre X por

$$d(x, A) := \inf\{a \in A : d(x, a)\}.$$

Se $A \subseteq B$, então $d(\cdot, A) \leq d(\cdot, B)$.

Proposição 2.36.

- $d(x, A) = d(x, A^-)$.
- $d(x, A) = 0$ *se, e tão-somente se, x em* A^-.
- $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ *para todos os x, y em* X.

Demonstração: Ad (i): Como $A \subseteq B$ implica $d(\cdot, A) \leq d(\cdot, B)$, em particular $d(\cdot, A) \leq d(\cdot, A^-)$. Se $\bar{a} \in A^-$, então por Proposição 2.10.(vi) para todo $\epsilon > 0$ a bola $B(\bar{a}, \epsilon)$ intersecta A. Logo, $d(\bar{a}, x) \leq d(A, x) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, isto é, $d(\bar{a}, x) \leq d(A, x)$. Como $\bar{a}$ foi arbitrário, $d(A^-, x) \leq d(A, x)$.

Ad (ii): Seja $B \subseteq X$. Se $x \in B$, então $d(x, B) = 0$. Em particular, se $x \in A^-$, então $d(x, A) = d(x, A^-) = 0$ por (i). Temos $d(x, A) = 0$ se, e tão-somente se, existe para todo $\epsilon > 0$ um a em A tal que $d(x, a) < \epsilon$; isto é, se, $B(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Por Proposição 2.10.(vi), isto vale se, e tão-somente se, $a \in A^-$.

Ad (iii): Pela desigualdade triangular

$$d(x, A) = \inf\{a \in A : d(x, a)\} \leq \inf\{a \in A : d(x, y) + d(y, a)\} = d(x, y) + d(y, A)$$

e, trocando x por y

$$d(y, A) = d(x, y) + d(x, A)$$

Isto é,

$$|\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \mathrm{d}(y,\mathrm{A})| \le \mathrm{d}(x,y).$$

Parte (iii) diz que $\mathrm{d}(\cdot,\mathrm{A})\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana para $\mathrm{M} = 1$. As funções uniformemente contínuas ou Lipschitzianas não são fechadas sob multiplicação; apenas as que são limitadas.

Teorema 2.37 (Completamento). *Para todo espaço métrico* X *existe um (único) espaço métrico completo* $\widehat{\mathrm{X}}$ *com uma aplicação (uniformemente contínua)* $\mathrm{X} \to \widehat{\mathrm{X}}$ *tais que para qualquer espaço métrico completo* Y *com uma aplicação (uniformemente contínua)* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$*, existe uma aplicação (uniformemente contínua)* $\widehat{\mathrm{X}} \to \mathrm{Y}$ *que a fatora, isto é*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Y} \\ \widehat{\mathrm{X}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demonstração: Definimos o conjunto

$$\widehat{\mathrm{X}} := \{ \text{ sequências de Cauchy em X } \}/\sim$$

(e no qual X se injeta pelas sequências constantes) onde a relação de equivalência $\sim$ é definida por $(x_n) \sim (y_n)$ se $\mathrm{d}(x_n, y_n) \to 0$. A função distância $\hat{\mathrm{d}}$ é definida por

$$\hat{\mathrm{d}}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim \mathrm{d}(x_n, y_n)$$

para representantes (x_n) e (y_n) das classes de equivalência $[(x_n)]$ e $[(y_n)]$. Observe que é bem-definida, isto é, independente dos representantes das classes de equivalência. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy (de classes de equivalência de sequências de Cauchy) com $x_n = [(x_{n,m} : m \in \mathbb{N})]$, então ela converge a sequência diagonal $x = (x_{n,n} : n \in \mathbb{N})$. (O leitor é convidado a convencer-se da existência da aplicação $\widehat{\mathrm{X}} \to \mathrm{Y}$.) □

Exercício 2.38.

(i) Questão: Se f e g são duas funções uniformemente contínuas respectivamente Lipschitzianas, então a sua composição $f \circ g$ é uniformemente contínua respectivamente Lipschitziana?

(ii) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico X e f uma função sobre X.

Mostra:

(a) Se f é uniformemente contínua, então $(f(x_n))$ é Cauchy.

(b) Fabrica um espaço métrico de X, uma função contínua f sobre ele e uma sequência de Cauchy (x_n) em X tal que $(f(x_n))$ não é Cauchy.

Dica: A sequência (a_n) com $a_n = \frac{1}{n}$ em $X :=]0, \infty[$ é Cauchy e $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \frac{1}{x}$ é contínua, mas $(f(a_n))$ não é Cauchy!

(iii) Sejam X e Y espaços métricos, e $f\colon D \to Y$ uma função definida sobre um subconjunto $D \subseteq X$.

Mostra: Se D é denso, Y completo e f é uniformemente contínua, então f estende-se de modo único continuamente a X; isto é, existe uma única função F que é contínua sobre X e cuja restrição $F{\restriction_D} = f$.

(iv) Seja X um espaço topológico, Y um espaço métrico e $f\colon D \to Y$ uma função definida sobre um subconjunto $D \subseteq X$. Um ponto a em X é *rígido* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto aberto $U \ni a$ em X tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x, y \in U \cap D.$$

Mostra: Se Y é completo, então f estende-se de modo único continuamente a todos os pontos rígidos; isto é, se E denote o conjunto de todos os pontos rígidos em X, então existe uma única função F que é contínua sobre E e cuja restrição $F{\restriction_D} = f$.

Dica: Dado e em E, usa a Generalização do Teorema de Cantor Exercício 2.24 para encontrar $F(e)$.

Seja $f\colon X \to Y$ é uma função entre dois espaços métricos. Se é uniformemente contínua, então preserva sequências de Cauchy, isto é, se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então $f(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Porém, o implicação recíproca não vale! Por exemplo, se X e Y são completos, então toda função contínua, como preserva sequências convergentes, preserva sequências de Cauchy. Mas existem funções contínuas que não são uniformemente contínuas sobre espaços completos; por exemplo, a parábola $x \mapsto x^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 2.39. Seja $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ a projeção estereográfica. É ϕ ou o seu inverso ϕ^{-1} (restrita à imagem de ϕ) uniformemente contínua?

Aplicações Lineares. Lembremo-nos que uma norma $\|\cdot\|$ sobre um espaço vetorial V induz a métrica $\mathrm{d}(x,y) := \|x - y\|$.

Em geral, uma função qualquer com valores em um espaço métrico é chamada de *limitada* se a sua imagem é limitada, isto é, contida em uma bola. Porém, uma função linear ϕ entre espaços vetoriais normados nunca é limitada neste sentido; em vez disso, ϕ é chamada de *limitada* se a sua imagem de uma (ou, equivalentemente, de toda) bola é contida em uma bola; por exemplo, a sua imagem da bola unitária fechada. (Equivalentemente, ϕ é limitada se, e tão-somente se, ϕ *preserva conjuntos limitados*, isto é, a sua imagem de todo conjunto limitado é limitado.) Veremos que, entre outras caracterizações, a de ser *limitada* ou *Lipschitziana* para uma função linear são equivalentes:

Lema 2.40. *Para uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados são equivalentes:*

(i) *é contínua,*

(ii) *é contínua em* 0*,*

(iii) *é limitada,*

(iv) *é Lipschitziana.*

Demonstração: Seja $f\colon \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados sobre um corpo normado $\mathbf{K}$.

(i) $\implies$ (ii): Claro.

(ii) $\implies$ (iii): Por contraposição: Se f é ilimitada, então existem h_n em V com $\|h_n\| \leq 1$ tal que $\|f(h_n)\| \geq n$. Logo $\mathrm{H}_n := \frac{1}{n} h_n \to 0$, mas $\|f(\mathrm{H}_n)\| \geq 1$, em particular, $(f(\mathrm{H}_n) : n \in \mathbb{N})$ não converge. Isto é, f não é contínua em 0.

(iii) $\implies$ (iv): Seja $f(\bar{\mathrm{B}}(0,1)) \subseteq \mathrm{B}(0,\mathrm{M})$. Para todo x e y em V,

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|f(h)\| = |\lambda| \|f(\lambda^{-1} \cdot h)\|$$

onde $h := x - y$ e λ em $\mathbf{K}$ não-nulo tal que $|\lambda| \|h\| \leq 1$. Como $f(\bar{\mathrm{B}}(0,1)) \subseteq \mathrm{B}(0,\mathrm{M})$, isto é, $\|f(h)\| \leq \mathrm{M}\|h\|$,

$$|\lambda| \|f(\lambda^{-1} \cdot h)\| \leq |\lambda| \mathrm{M} \|\lambda^{-1} \cdot h\| = \mathrm{M}|h| = \mathrm{M}|x - y| = \mathrm{M}\,\mathrm{d}(x,y).$$

(iv) $\implies$ (i): Claro. $\square$

Exercício 2.41. Seja $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ o espaço vetorial das sequências cujas entradas reais são quase todas nulas (= todas, exceto um número finito) e a sua norma dada por $\|(a_n)\| := \max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$; Seja $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ a base canónica dos vetores cujas entradas são todas 0 exceto a n-ésima a qual é 1. Mostra que a aplicação linear $f \colon V \to \mathbb{R}$ definida por $e_n \mapsto n$ não é contínua!

Equivalências entre Métricas e Normas. Duas métricas são *topologicamente equivalentes* se os seus conjuntos abertos são os mesmos.

Exercício 2.42 (Continuação de Exercício 2.2). Mostra: Se d é uma métrica, então a métrica limitada $\frac{1}{1+\mathrm{d}}$ é topologicamente equivalente a d!

Em um espaço métrico, as sequências convergentes determinam os conjuntos fechados por serem os que contêm os limites das sequências convergentes neles; logo, os conjuntos abertos como complementos destes conjuntos. Utilizemos esta observação:

Definição. Duas métricas d' e d'' sobre o mesmo conjunto X são *(Lipschitz-)equivalentes* se existem constantes c e C positivas tais que

$$c \cdot \mathrm{d}' \leq \mathrm{d}'' \leq C \cdot \mathrm{d}',$$

isto é, a identidade entre os espaços métricos $(X, \mathrm{d}') \to (X, \mathrm{d}'')$ e $(X, \mathrm{d}'') \to (X, \mathrm{d}')$ é Lipschitziana.

Duas métricas d' e d'' sobre o mesmo conjunto X são

(i) *uniformemente equivalentes*) se têm as mesmas sequências de Cauchy se, e tão-somente se, a identidade entre os espaços métricos $(X, \mathrm{d}') \to (X, \mathrm{d}'')$ e $(X, \mathrm{d}'') \to (X, \mathrm{d}')$ é uniformemente contínua,

(ii) *topologicamente equivalentes*) se têm as mesmas sequências convergentes se, e tão-somente se, a identidade entre os espaços métricos $(X, \mathrm{d}') \to (X, \mathrm{d}'')$ e $(X, \mathrm{d}'') \to (X, \mathrm{d}')$ é contínua.

Exercício 2.43. Mostra que, apesar das métricas d, d_+ e $\mathrm{d}_{\max}$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em Exemplo 2.1 serem diferentes, são equivalentes!

Dica. Mostra que

$$\|\cdot\|_{\max} \leq \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_+ \leq 2 \cdot \|\cdot\|_{\max};$$

isto é, a identidade entre os espaços métricos dados pelo conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e as métricas d, d_+ e $\mathrm{d}_{\max}$ são Lipschitzianas; em particular, contínuas. Conclui por Exercício 2.32!

Se duas métricas são Liptschitz-equivalentes, então são uniformemente equivalentes; Se duas métricas são uniformemente equivalentes, então são topologicamente equivalentes. Contudo, vale nenhum inverso:

Exercício 2.44. Mostra que as métricas d e $\frac{\mathrm{d}}{1+\mathrm{d}}$ não são uniformemente equivalentes!

Exercício 2.45. Fabrica duas métricas

- com a mesma topologia, mas sequências de Cauchy diferentes, e
- com as mesmas sequências de Cauchy, mas que não são equivalentes.

Dica. Para a primeira construção, observa que, por exemplo, exp e log são aplicações contínuas e mutuamente inversas entre $\mathbb{R}$ e $]0,\infty[$, mas um espaço métrico e completo e outro não.

Exercício 2.46. Mostra que se duas métricas d' e d'' sobre um espaço vetorial são induzidas por normas $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$, então elas são topologicamente equivalentes se, e tão-somente se, elas são Lipschitz-equivalentes, isto é, existem constantes c e C positivas tais que

$$c\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|'' \leq \mathrm{C}\|\cdot\|'.$$

Dica. Usa Lema D.4.

Logo, se duas distâncias são ambas induzidas por normas, então são equivalentes: a sua equivalência

- topológica,
- uniforme, e
- de Lipschitz.

Por isso, chamemos duas normas simplesmente de *equivalentes* se satisfazem uma (se, e tão-somente se, todas) destas três equivalências.

Proposição 2.47. *Sejam* F *e* E *dois espaços vetoriais normados com* $\mathrm{F} \supseteq \mathrm{E}$. *Se* E *é fechado, então a função sobre* F/E *definida por*

$$\|f + \mathrm{E}\|_{\mathrm{F}/\mathrm{E}} := \inf\{\|f + e\|_{\mathrm{F}} : e \in \mathrm{E}\}$$

é uma norma e a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &\to \mathrm{F}/\mathrm{E} \\ f &\mapsto f + \mathrm{E} \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Temos $\|f+\mathrm{E}\|_{\mathrm{F/E}} = 0$ se, e tão-somente se, existe uma sequência e_n em E tal que $f+e_n \to 0$. Como E é fechado, $f+\mathrm{E}$ é fechado, logo $0 = \lim f + e_n$ em $f + \mathrm{E}$. As outras propriedades de uma norma para $\|\cdot\|_{\mathrm{F/E}}$ seguem das de $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$.

Por definição $\|\pi(\cdot)\|_{\mathrm{F/E}} \leq \|\cdot\|_{\mathrm{F}}$, isto é, $\pi\colon \mathrm{F} \to \mathrm{E/F}$ é 1-Lipschitziana; em particular, contínua. □

Chamemos a norma sobre F/E de *norma quociente* e a aplicação $\mathrm{F} \to \mathrm{F/E}$ de *aplicação quociente*.

Proposição 2.48. *Sejam* F *e* E *dois espaços vetoriais normados com* $\mathrm{F} \supseteq \mathrm{E}$. *Se* E *e* F/E *são completos, então* F *é completo.*

Demonstração: Seja f_n uma sequência de Cauchy em F

Como F/E é completo, existe f em F tal que $f_n + \mathrm{E} \to f + \mathrm{E}$, isto é, $\|f_n - f\|_{\mathrm{F/E}} \to 0$.

Por definição de $\|\cdot\|_{\mathrm{F/E}}$, existe uma sequência (e_n) em E tal que $\|f_n - f + e_n\| \to 0$; logo, (e_n) é Cauchy. Como E é completo, existe e em E tal que $e_n \to e$.

Logo, $\|f_n - f + e\| \to 0$. □

Corolário 2.49. *Seja* V *um espaço vetorial normado sobre um corpo normado* $\mathbf{K}$. *Se* $\mathbf{K}$ *é completo e* $\dim \mathrm{V} < \infty$, *então* V *é completo; em particular, todo subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita é fechado.*

Demonstração: Como $\mathbf{K}$ é completo, todo espaço vetorial normado de dimensão 1 sobre $\mathbf{K}$ é completo. Logo, por indução, usando Proposição 2.48, V é completo.

Como um subconjunto em um espaço métrico completo é fechado se, e tão-somente se, é completo, em particular todo subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita é fechado. □

Observemos que em comparação a outras demonstrações da equivalência entre normas ou da continuidade de aplicações lineares sobre um espaço vetorial de dimensão finita (que são corolários mútuos como mostra Corolário 2.51), a elaborada em baixo não usa propriedades especificas de $\mathbb{R}$ como o Teorema de Heine-Borel:

Exercício 2.50. Seja $f\colon \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais normados sobre um corpo normado $\mathbf{K}$. Se $\dim \mathrm{V} < \infty$ e $\mathbf{K}$ é completo, então f é contínua.

Dica. Demonstremos os seguintes passos em dada ordem:

(i) Um *funcional* sobre V, isto é, uma aplicação linear $f : \mathrm{V} \to \mathbf{K}$, é contínua se, e tão-somente se, $\ker f = f^{-1}\{0\}$ é fechado.

(ii) Seja $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ é uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais normados. Se $\dim \mathrm{V} = n < \infty$, então existem funcionais $f_1, \ldots, f_n$ sobre V e $w_1, \ldots, w_n$ em W tais que $f(\cdot) = f_1(\cdot)w_1 + \cdots + f_n(\cdot)w_n$.

(iii) Como um subconjunto em um espaço métrico completo é fechado se, e tão-somente se, é completo, por Corolário 2.49 os funcionais $f_1, \ldots, f_n$ são contínuos. Logo f é contínua.

Corolário 2.51. *Seja* $\mathbf{K}$ *um corpo normado e sejam (i) e (ii) as implicações seguintes:*

(i) *Seja* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais normados sobre* $\mathbf{K}$. *Se* $\dim \mathrm{V} < \infty$, *então* f *é contínua.*

(ii) *Todas as normas sobre um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes.*

Temos (i) implica (ii) e, se $\mathbf{K}$ *é completo, então (ii) implica (i):*

Demonstração: (i) $\implies$ (ii): Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e denote V' o espaço vetorial V munido com a norma $\|\cdot\|'$ e V'' o munido com a norma $\|\cdot\|''$. Como as identidades $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}''$ e $\mathrm{V}'' \to \mathrm{V}'$ são lineares, logo, pela hipótese, elas são contínuas. Em particular, são reciprocamente inversas; isto é, V' e V'' são homeomórficos; por Exercício 2.46, as normas são equivalentes.

(ii) $\implies$ (i): A aplicação linear $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ fatora em

$$\mathrm{V} \twoheadrightarrow \mathrm{V}/\ker f \xrightarrow[\sim]{\mathrm{T}} \operatorname{im} f \hookrightarrow \mathrm{W}.$$

Como $\mathbf{K}$ é completo e $\dim \mathrm{V} < \infty$, o subespaço $\dim \ker f$ é fechado. Logo $\mathrm{V} \twoheadrightarrow \mathrm{V}/\ker f$ é contínua.

Uma inclusão $\operatorname{im} f \hookrightarrow \mathrm{W}$ (onde o lado esquerdo tem a topologia induzida do lado direito, aqui, a dada pelos conjuntos $\mathrm{U} \cap \operatorname{im} f$ para U um subconjunto aberto em W) é sempre contínua.

Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de $\mathrm{V}/\ker f$ e $w_1 = \mathrm{T}(v_1), \ldots, w_n = \mathrm{T}(v_n)$ os seus valores sob $\mathrm{T} : \mathrm{V}/\ker f \to \operatorname{im} f$. Pela hipótese, as normas são equivalentes às, por exemplo, dadas por

$$\|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \quad \text{e} \quad \|\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n\| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|.$$

Logo $\|\mathrm{T}(v)\| = \|v\|$; em particular, T é contínua.

Logo $f\colon V \to W$ como composição

$$V \twoheadrightarrow V/\ker f \xrightarrow[\sim]{T} \operatorname{im} f \hookrightarrow W$$

de aplicações contínuas é contínua. □

2.5. Conexidade

Uma *cisão* de X é uma união
$$X = A \cup B$$
de subconjuntos A e B em X tais que $A \cap B^- = \emptyset = A^- \cap B$.

Observação. Uma união
$$X = A \cup B$$
é uma cisão de X se, e tão-somente se, X é uma união disjunta

$$X = A \dot{\cup} B,$$

tais que, equivalentemente, como A e B são mutuamente complementares,

- ou A, ou B, é no mesmo tempo aberto e fechado,
- ambos A e B são abertos,
- ambos A e B são fechados.

Demonstração: Se
$$X = A \cup B$$
tais que $A \cap B^- = \emptyset = A^- \cap B$, ou, equivalentemente, $A \subseteq X - B^-$ e $B \subseteq X - A^-$, então, como todo subconjunto é contido no seu fecho, A e B são disjuntos. Logo $X - B = A \subseteq X - B^-$, ou, equivalentemente, $B \supseteq B^-$, logo, como todo subconjunto é contido no seu fecho, $B = B^-$ e, da mesma maneira, $A = A^-$.

Se
$$X = A \dot{\cup} B,$$
onde A e B são ambos fechados, então $A = A^-$ e $B = B^-$ e

$$A \cap B^- = A \cap B = \emptyset = A \cap B = A^- \cap B.$$

Um espaço métrico X é *conexo* se toda cisão $X = A \cup B$ é trivial, isto é, ou A, ou B é vazio, e ele é *desconexo* se existe uma cisão não-trivial. Formulemos de uma maneira mais palpável:

Definição 2.52. Um espaço métrico X é *conexo* se os únicos subconjuntos de X que são, no mesmo tempo, fechados e abertos são X e $\emptyset$. Equivalentemente, X é *desconexo* se existem subconjuntos, ambos não-vazios e abertos (ou, equivalentemente, fechados), Y e Z tais que $X = Y \dot{\cup} Z$ é a sua união disjunta.

Exemplo 2.53. Se
$$X = B(x', \epsilon') \cup \bar{B}(x'', \epsilon'')$$
é a união de uma bola aberta e de outra bola fechada que não se *toquem*, isto é, tais que $d(x, x'') > \epsilon' + \epsilon''$, então ambas as bolas são abertas e fechadas em X; isto é, X é *desconexo.*

Teorema 2.54. *Seja $f : X \to Y$ contínua. Se a sua imagem $f(X)$ é desconexa, então X é desconexo, ou, equivalentemente, se X é conexo, então a sua imagem $f(X)$ é conexa.*

Demonstração: A operação da pré-imagem sob f preserva conjuntos abertos, a união de conjuntos e conjuntos disjuntos. □

Conexidade na reta e no plano. Como caracterizar a conexidade na reta e no plano geometricamente?

Lema 2.55. *Um subconjunto X em $\mathbb{R}$ é um intervalo se, e tão-somente se, para cada par de pontos a e b em X, o intervalo inteiro $[a, b] \subseteq X$.*

Demonstração: Se X é um intervalo, então para cada par de pontos a e b em X, o intervalo inteiro $[a, b] \subseteq X$.

Se X em $\mathbb{R}$ é tal que, para cada par de pontos a e b em X, o intervalo inteiro $[a, b] \subseteq X$, então ponhamos
$$A = \inf\{a \in X\} \quad \text{e} \quad B = \sup\{b \in X\}.$$
Temos
$$X \subseteq \bigcup \{[a, b] : a, b \in X\} =]A, B[.$$
Como para cada par de pontos a e b em X, o intervalo inteiro $[a, b] \subseteq X$, obtemos
$$X -]A, B[\subseteq \{A, B\}.$$

Proposição 2.56. *Um subconjunto X em $\mathbb{R}$ é conexo se, e tão-somente se, X é um intervalo.*

Demonstração: Seja X um intervalo fechado à esquerda e a o seu ponto extremo inicial. (A demonstração para o intervalo aberto à esquerda prossegue da mesma maneira.) Seja $A \subset X$ um subconjunto próprio aberto que contenha a. Para mostrar que X é conexo, precisamos de mostrar que A não é fechado, isto é, existe uma sequência em X cujo limite não pertence a A: Como A é aberto e contém a, existe $\epsilon > 0$ tal que $[a, a+\epsilon[\subseteq A$. Seja

$$r = \sup\{\epsilon : [a, a+\epsilon[\subseteq A\}.$$

Como $[a, a+\epsilon[\subseteq A$ para todo $\epsilon < r$, também $[a, a+r[= \bigcup_{\epsilon<r}[a, a+\epsilon[\subseteq A$.

Existe uma sequência (monótona) $(a+\epsilon_n)$ em A tal que $a+\epsilon_n \to a+r$.

Contudo, $a+r \notin A$: Caso contrário, por A ser aberto, existiria $\delta > 0$ tal que $[a, a+r+\delta[\subseteq A$, em contradição à definição de r como supremo.

Se X é conexo, então mostremos que X é um intervalo, por Lema 2.55, se, e tão-somente se, para cada par de pontos a e b em X, o intervalo inteiro $[a, b] \subseteq X$. Isto é, por contraposição, se X não é um intervalo, então existem pontos x e y em X tais que $z \notin X \cap [x, y]$. Sendo assim, podemos construir uma cisão não-trivial do conjunto X por

$$X = A \cup B \quad \text{com } A = X \cap]-\infty, z[\text{ e } B = X \cap]z, \infty[.$$

e verifiquemos que são ambos abertos, não-vazios (porque x em A e y em B), disjuntos e a sua união é X Logo, X é desconexo. □

Corolário 2.57. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo.*

Demonstração: Por Teorema 2.54 e Proposição 2.56. □

Em particular, se X é um intervalo em $\mathbb{R}$, então obtemos:

Teorema 2.58 (Teorema do Valor Intermediario). *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \leq \xi \leq f(b)$, então existe x em $[a, b]$ tal que $f(x) = \xi$.*

Ao invés de $\mathbb{R}^n$ para n em $\mathbb{N}$, o leitor pense em seguida no caso geometricamente mais acessível $n = 2$ quando $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como espaço vetorial normado.

Um *segmento* (de uma reta) entre dois pontos a e $b = a + h$ em $\mathbb{R}^n$, denotada por $[a, b]$, é a imagem da aplicação $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$t \mapsto a + th.$$

Um *polígono* ou *caminho poligonal* P é a união de secções de retas $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $\ldots$, $[z_{n-1}, z_n]$,

$$P = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n].$$

Isto é, tal que o fim de um segmento de reta é o início do segmento de reta seguinte. O caminho poligonal *conecta* ou *liga* a e b se $z_0 = a$ e $z_n = b$. Dois pontos são *ligados* se existe um caminho poligonal que os conecta.

Teorema 2.59. *Seja* G $\subseteq \mathbb{R}^n$. *Se para todo par de pontos a e b em* G *existe um caminho poligonal que conecta a e b em* G*, então* G *é conexo. Se* G *é um subconjunto* aberto*, então a implicação inversa vale, isto é, se* G *é aberto e conexo, então para todo par de pontos a e b em* G *existe um caminho poligonal que conecta a e b em* G.

Demonstração: Se G desconexo, então mostremos que existe um par de pontos que nenhum polígono em G consegue conectar. Seja $G = A \dot{\cup} B$ a união disjunta de dois subconjuntos abertos não-vazios A e B. Seja $L = \phi([0,1])$ um segmento em G. Como $[0,1]$ é conexo, $\operatorname{im} \phi = L$ é conexo. Como $G = A \dot{\cup} B$ para dois subconjuntos abertos, ou $L \subseteq A$, ou $L \subseteq B$. Logo, não existe segmento em G que conecta um ponto em A com outro em B.

Se G é conexo e aberto, então mostremos que para qualquer a_0 em G, o conjunto

$$A = \{a \in G : a \text{ é ligado com } a_0\}$$

é aberto e fechado; logo, como G é conexo, A = G. Observemos que

- todo par de pontos em uma bola é ligado (por um segmento), e
- se x e y são ligados, então y e z são ligados se, e tão-somente se, x e z são ligados

Seja a em G. Como G é aberto, existe uma bola B dentro de G à volta de a. Logo, todo b em B é ligado com a. Pela observação, todo b em B é ligado com a_0 se, e tão-somente se, a é ligado com a_0. Isto é, se a em A então $B \subseteq A$, e se $a \notin A$, então $B \cap A = \emptyset$. Isto é, A é aberto e $X - A$ é aberto. □

Corolário 2.60. *Se* G *em* $\mathbb{R}^n$ *é aberto e conexo, então para todo par de pontos existe um polígono em* G *cujos segmentos são paralelos, ou ao eixo real, ou ao eixo imaginário.*

Demonstração: Pela mesma demonstração como acima, no entanto, restringe A aos pontos cujos polígonos satisfazem uma tal condição. Em vez de $[z, z + h]$ em $B(z_0, \epsilon)$, com $h = x + iy$,

1. decompõe $x = x_1 + \cdots + x_n$ e $y = y_1 + \cdots + y_n$ com $|x_1|, \ldots, |x_n| \leq |x|$ e $|y_1|, \ldots, |y_n| \leq |y|$,

2. escreve

$$z_0 = z, \quad z_n = z + h \quad \text{e} \quad z_m = z_0 + (x_1 + \cdots + x_m) + i(y_1 + \cdots + y_m),$$

3. e usa o polígono

$$P = [z, z + x_1] \cup [z + x_1, z + x_1 + iy_1] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_{n-1} + x_n] \cup [z_{n-1} + x_n, z + h]$$

onde n é escolhido suficientemente grande para garantir $P \subseteq B(z_0, \epsilon)$. □

Componentes Conexos. Mostremos que todo conjunto S em um espaço métrico é canonicamente a união de espaços conexos:

Definição 2.61. O subconjunto D de um espaço métrico X é um *componente (conexo)* de X se D é um subconjunto conexo *máximo*, isto é, não existe outro subconjunto conexo em X que (propriamente) contém D.

Exemplo 2.62.

- Em Exemplo 2.53, o conjunto desconexo

$$X = A \dot{\cup} B \quad \text{com } A = B(x', \epsilon') \text{ e } B = \bar{B}(x'', \epsilon'')$$

tem os únicos componentes A e B.

- Em $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ (cuja métrica é a restrição da sobre $\mathbb{R}$) os componentes são os pontos. Enquanto todos os componentes $\{1\}$, $\{\frac{1}{2}\}$, $\{\frac{1}{3}\}$, ... são abertos, o componente $\{0\}$ não é aberto (como o seu complemento não é fechado porque contém a sequência $(\frac{1}{n})$, mas não o seu limite).

Exercício 2.63. Seja X um espaço métrico e $Y \subseteq X$.

- Se G é um subconjunto aberto em X, então $G \cap Y$ é aberto em Y.
- Se G é fechado em X, então $G \cap Y$ é fechado em Y.

Lema 2.64. *Seja* $\mathscr{D} = \{D_j : j \in J\}$ *uma coleção de subconjuntos conexos de* X *tal que* $\bigcap \mathscr{D} \neq \emptyset$. *Então* $D = \bigcup \mathscr{D}$ *é conexo.*

Demonstração: Seja A em D não-vazio, aberto e fechado. Logo todo $A \cap D_j$ é aberto e fechado por Exercício 2.63. Como D_j é conexo, $A \cap D_j$ é ou D_j, ou $\emptyset$. Como $A \neq \emptyset$, existe um j_0 tal que $D_{j_0} \cap A \neq \emptyset$; logo $D_{j_0} \cap A = D_{j_0}$; isto é, $D_{j_0} \subseteq A$. Como $\bigcap \mathscr{D} \neq \emptyset$, todo $D_j \cap A \neq \emptyset$; logo todo $D_j \cap A = D_j$. Isto é, todo $D_j \subseteq A$; isto é, $D = \bigcup \mathscr{D} \subseteq A$; isto é, D é conexo. □

Teorema 2.65. *Seja* X *um espaço métrico.*

(i) *Todo ponto* x_0 *em* X *pertence a um componente de* X

(ii) *Dois componentes diferentes são disjuntos.*

Demonstração: Ad (i): Seja $\mathscr{C}$ a coleção de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x_0. Como $\{x_0\} \in \mathscr{C}$ é não-vazia. Por Lema 2.64, $C = \bigcup \mathscr{C}$ é conexo. É máximo por definição de $\mathscr{C}$.

Ad (ii): Sejam C' e C'' componentes. Se $C' \cap C'' \neq \emptyset$, então por Lema 2.64 $C = C' \cup C''$ é conexo. Logo $C = C'$ ou $C = C''$. □

Proposição 2.66.

- *Se* A *em* X *é conexo e* $A \subseteq B \subseteq A^-$*, então* B *é conexo.*
- *Se* C *é um componente de* X*, então* C *é fechado.*

Demonstração: Ad (ii): Se C é conexo, então $C^- \supseteq C$ é conexo por (ii); como C é máximo, $C^- = C$. Logo basta demonstrar (i).

Ad (i): Por contraposição: Seja B desconexo, isto é, $B = C \dot\cup D$ com C e D ambos não-vazios e abertos em B. Logo $A = \tilde{C} \dot\cup \tilde{D}$ onde $\widetilde{C} = C \cap A$ e $\widetilde{D} = D \cap A$ são ambos abertos em A. Para concluir, falta demonstrar que nenhum dos dois é vazio: Como $C \subseteq B \subseteq A^-$ contém algum x em A^-, por Proposição 2.10.(vi), a interseção $\widetilde{C} = C \cap A$ do conjunto aberto C com A não é vazia; da mesma maneira, $\widetilde{D}$ não é vazio. □

Teorema 2.67. *Seja* $G \subseteq \mathbb{C}$ *Se* G *é aberto, então os componentes de* G *são abertos e a quantidade deles é enumerável.*

Demonstração: Seja C um componente de G e x_0 em C. Como G é aberto, existe uma bola $B \ni x_0$ dentro de G. Por Lema 2.64, $C \cup B$ é conexo. Por C ser máximo $B \subseteq G$.

O subconjunto enumerável $E := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \cap G$ é denso, isto é, toda bola em G intersecta E. Como todo componente em G é aberto e eles são disjuntos, existem um ponto em E diferente dos outros componentes; logo, a quantidade dos componentes é $\leq$ a cardinalidade de E, logo enumerável. □

Exercício 2.68. Questão: Quais são os componentes conexos de

(i) $X = \{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z-2| < 1\}$

(ii) $X = [0,1[\cup \{1 + \frac{1}{n} : n \geq 1\}$

(iii) $X = \mathbb{C} - (A \cup B)$ com $A = [0,\infty[$ e $B = \{r(\cos\theta + i\sin\theta) : \theta \in [0,\infty[$ e $r = \theta\}$

2.6. Compacidade

Seja X um espaço métrico.

Definição. Seja K um subconjunto de X. Uma *cobertura* de K é uma família de subconjuntos abertos

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

de X tal que a sua união contenha K, isto é

$$\bigcup \mathcal{U} \supseteq K.$$

O espaço K é *compacto* se toda cobertura $\mathcal{U}$ de K tem um *refinamento finito*; isto é, se contém uma subcobertura finita de K; isto é, existem $U_1, \ldots, U_n$ em $\mathcal{U}$ tal que $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$.

Exemplo 2.69.

- Todos os conjuntos finitos são compactos
- a bola unitária aberta $B(0,1)$ não é compacto em $\mathbb{R}$: a cobertura $B(0,1-\frac{1}{n})$ contém nenhuma subcobertura finita.

Proposição 2.70. *Seja* K *um subconjunto de* X.

(i) *Se* K *é compacto, então é fechado.*

(ii) *Se* K *é compacto, então é* limitado*, isto é, contido em uma bola.*

(iii) *Se* F *é fechado e* $F \subseteq K$*, então* F *é compacto.*

Demonstração: Ad (i): Mostremos que $K = K^-$ por contraposição: Seja $K \neq K^-$, isto é, exista $x \in K^- - K$, e mostremos que K não é compacto, isto é, existe uma cobertura $\mathscr{C}$ de K tal que $K \nsubseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$ para quaisquer $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{C}$. Seja

$$\mathscr{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{com } C_n := X - \bar{B}(x, \frac{1}{n})$$

uma cobertura de K.

Como $x \in K^-$, por Proposição 2.10.(vi), toda bola em torno de x intersecta K. Em particular, toda bola da forma $\bar{B}(x, \frac{1}{n})$ intersecta K; equivalentemente, nenhum conjunto $C_n = X - \bar{B}(x, \frac{1}{n})$ em $\mathscr{C}$ contém K.

Como $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$, a união de toda coleção finita $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_n}\}$ de $\mathscr{C}$ é contida em C_I para $i = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$. Logo, nenhuma coleção finita de $\mathscr{C}$ cobre K.

Ad (ii): Por contraposição: Se K é ilimitado, isto é, contido em nenhuma bola $B(0, n)$ para n em $\mathbb{N}$, então $\mathscr{C} = \{B(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura de K sem refinamento finito.

Ad (iii): Seja K compacto e F em K um subconjunto fechado. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura de F. Logo $\mathscr{D} = \mathscr{C} \cup \{X - F\}$ é uma cobertura de K; Como K é compacto, existe uma subcobertura finita de $\mathscr{D}$; logo uma subcobertura de $\mathscr{D}$ finita de F. □

Observação 2.71. Todo subconjunto compacto é fechado e limitado; porém, a implicação inversa não vale em geral, isto é, existe um espaço métrico com um subconjunto limitado e fechado que não é compacto!

Por exemplo, seja $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ o espaço vetorial das sequências cujas entradas reais são quase todas nulas (= todas, exceto um número finito) e a sua norma dada por $\|(a_n)\| := \max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$; em particular, $\|\cdot\|$ induz a métrica $d(a, b) = \|a - b\|$. Seja $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ a base canónica de V dada por e_n = a sequência cuja única entrada não-nula é a n-ésima com valor 1. O conjunto B é limitada e, como $d(e_n, e_m) = 1$ se (e tão-somente se) $n \neq m$, ele tem nenhum ponto de acumulação, logo é fechado. Porém, a cobertura de B dada pela coleção

$$\{B(e_n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$$

não tem refinamento finito porque $B(e_n, 1) \cap B = \{e_n\}$.

Contudo, o Teorema de Heine-Borel abaixo mostrará que para $X = \mathbb{R}$ (e os seus produtos finitos), a implicação inversa vale: todo subconjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}$ (e nos seus produtos finitos) é compacto.

Recordemo-nos de que uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um espaço métrico X tem a *Propriedade de Interseções Finitas* ou a *PIF*, se para todos $C_1, \ldots, C_n$ em

$\mathscr{C}$ a sua interseção $C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$. Por exemplo, a coleção dos conjuntos $X - B(0, \frac{1}{n})$ para n em $\mathbb{N}$ tem a PIF.

Proposição 2.72. *Um subconjunto* K *em* X *é compacto se, e tão-somente se, para toda coleção* $\mathscr{C}$ *de subconjuntos fechados em* K*, se* $\mathscr{C}$ *tem a PIF, então* $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$.

Isto é, se a interseção entre todos os conjuntos de uma coleção $\mathscr{C}$ *de subconjuntos fechados em* K *é vazia, então já a interseção entre um número finito de conjuntos em* $\mathscr{C}$ *é vazia.*

Demonstração: Seja $\mathscr{F}$ uma coleção de subconjuntos em X tal que: Se $\mathscr{F}$ tem a PIF, então $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$; ou equivalentemente, por contraposição: Se $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$, então há um número finito de conjuntos em $\mathscr{F}$ cuja interseção é vazia; ou equivalentemente, para a coleção dos complementos $\mathscr{C} = \{X - F : F \in \mathscr{F}\}$: Se $\bigcup \mathscr{C} = X$, então há um número finito de conjuntos em $\mathscr{C}$ cuja união é X.

Concluímos em particular que toda coleção de subconjuntos fechados em X tem a PIF se, e tão-somente se, X é compacto.

Todo subconjunto K em X é compacto se, e tão-somente se, é relativamente compacto, isto é, toda cobertura de conjuntos *abertos em* K, isto é, de conjuntos da forma $U \cap K$ para U um subconjunto aberto em X, tem um refinamento finito. Equivalentemente, se, e tão-somente se, toda coleção $\mathscr{F}$ de conjuntos *fechados em* K, isto é, de conjuntos da forma $K \cap F$ para F fechado em X, tem a PIF.

Se K é compacto, então é fechado por Proposição B.8. Logo um conjunto é relativamente fechado, isto é, fechado em K se, e tão-somente se, é fechado em X. Concluímos que toda coleção de subconjuntos fechados em K tem a PIF se, e tão-somente se, K é compacto. □

Corolário 2.73. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração: Pela caracterização da completude pelo Teorema de Cantor, Teorema 2.22, e por Proposição B.10. □

Corolário 2.74. *Se* X *é compacto, então todo conjunto infinito tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Por contraposição: Todo subconjunto infinito contém uma sequência (x_n) de pontos distintos. Se $F = \{x_n\}$ tem nenhum ponto de acumulação, então $F_N := \{x_N, x_{N+1}, \ldots\}$ tem nenhum ponto de acumulação para todo $N \in \mathbb{N}$. Logo, por Exercício 2.17, é fechado. A coleção de conjuntos fechados $\{F_N : N \in \mathbb{N}\}$ tem a PIF; porém $\bigcap F_N = \emptyset$ porque todos os x_n são distintos. Logo, por Proposição B.10, X não é compacto. □

Compacidade Sequencial. Caracterizemos a compacidade pela convergência de sequências:

Definição. Um espaço métrico é *sequencialmente compacto* se toda sequência tem uma subsequência convergente.

Nem todo espaço *topológico* compacto é sequencialmente compacto como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo. Um *funcional* sobre um espaço vetorial normado V sobre um corpo (normado) $\mathbf{K}$ é uma aplicação linear e contínua $f \colon V \to \mathbf{K}$. Denote

$$V^* := \{ \text{ todos os funcionais } f \colon V \to \mathbf{K}\}.$$

o *dual* de V. Lema D.4 permite definir a norma $\|f\|$ de um funcional f por

$$\|f\| := \sup\{|f(v)| : v \text{ em } V \text{ com } \|v\| \leq 1\}.$$

A topologia *fraca** de V^* é a topologia inicial das avaliações $f \mapsto f(v)$ para todos os v em V; isto é, a menor topologia tal que toda avaliação $e_v \colon V^* \to \mathbf{K}$ definida por $e_v \colon f \mapsto f(v)$ seja contínua; isto é, a topologia gerada pelas pré-imagens $e_v^{-1}U$ para todas as avaliações $e_v \colon V^* \to \mathbf{K}$ e conjuntos abertos U em $\mathbf{K}$.

Formulado de forma mais palpável pela convergência das sequências (que definem os conjuntos fechados, logos os abertos como seus complementos): Uma sequência (f_n) em V^* converge se $(f_n(x))$ converge para todo x em V.

Seja

$$c^b(\mathbb{N}) := \{(a_n : n \in \mathbb{N}) : \sup\{|a_n|\} < \infty\}$$

o espaço normado pelo supremo das sequências limitadas. A bola unitária do dual V^* de $V = c^b(\mathbb{N})$ é compacta para a topologia fraca* pelo Teorema de Alaoglu. Porém, a sequência $(f_{n_0} = [(a_n) \mapsto a_{n_0}] : n_0 \in \mathbb{N})$ em V^* tem nenhuma subsequência convergente: Pela definição da topologia fraca* e de f_{n_0}, a sequência de funcionais (f_{n_0}) em V^* converge se, e tão-somente se, toda sequência de reais em V converge; mas existem sequências limitadas divergentes.

Contudo, espaços métricos são sequencialmente compactos se, e tão-somente se, são compactos:

Teorema 2.75. *Se* X *é um espaço métrico, então* X *é sequencialmente compacto se, e tão-somente se,* X *é compacto.*

Demonstração: Mostremos a implicação $\Longleftarrow$ por contraposição, isto é, se não é sequencialmente compacto, então não é compacto: Seja (x_n) tal que nenhuma subsequência converge, isto é, para todo x em X existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $B(x, \epsilon(x)) \cap \{x_n\}$ é finita. Se a cobertura $\{B(x, \epsilon(x)) : x \in X\}$ tivesse um refinamento finito, então (x_n) seria finita, em particular, convergente; em contradição ao que nenhuma subsequência converge. Logo X não é compacto.

Mostremos a implicação $\Longrightarrow$ em três passos:

(i) *Lema do Número da Cobertura de Lebesgue*: Para toda cobertura $\{U_i\}$ existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo x em X, existe i tal que $B(x, \epsilon) \subseteq U_i$.

(ii) *Cota Total*: Para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura finita de X por bolas $B(x, \epsilon)$.

(iii) O espaço topológico X é compacto.

Ad (i): Por contraposição: Se existe uma cobertura $\{U_i\}$ tal que, para todo n, existe x_n em X tal que $B(x_n, 1/n)$ é contida em nenhum U_i, então (x_n) tem nenhuma subsequência convergente: Se (x_n) tivesse uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$, então

- existe $\epsilon > 0$ e i_0 tal que $B(x, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$, e
- existe N tal que x_{n_k} em $B(x, \epsilon)$ para todo $n_k \geq N$.

Logo, existe k suficientemente grande tal que $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$; em contradição à escolha de x_{n_k}!

Ad (ii): Por contraposição: Se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n e $a_1, \ldots, a_n$ em X existe

$$a \notin B(a_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(a_n, \epsilon),$$

então define a sequência (x_n) por uma escolha arbitrária de x_1 e a escolha de

$$x_{n+1} \notin B(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon).$$

Se (x_n) tivesse uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$, então existiria para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ um N tal que x_{n_k} em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ para todo $n_k \geq N$. Logo, $d(x_{n_k}, x_N) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_N) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, isto é,

$$x_{n_k} \in B(x_N, \epsilon)$$

para todo $n_k > N$; em contradição à escolha de x_{n_k} para $n_k > N$!

Ad (iii): Seja $\{U_i\}$ uma cobertura de X. Seja $\epsilon > 0$ dado por (i) e $x_1, \ldots, x_n$ por (ii). Logo o refinamento dado pelos $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ que contêm respetivamente $x_1, \ldots, x_n$ cobre X. □

Observação. A implicação $\Longleftarrow$ segue diretamente de Corolário 2.74: Seja (x_n) uma sequência em X. Ou $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, então tem uma subsequência constante, em particular, convergente; ou S é infinito: então, por Corolário 2.74 existe um ponto de acumulação em S, logo, uma subsequência convergente de (x_n).

Exemplo. Se o corpo $\mathbf{K}$ é separável com subconjunto denso enumerável D, por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$ com o seu subconjunto denso $D = \mathbb{Q}$, então o espaço normado pelo supremo

$$c_0(\mathbb{N}) := \{(a_n : n \in \mathbb{N}) : a_n \to 0\}$$

é separável pelo conjunto denso enumerável

$$E = \{(a_n) : \text{ todos os } a_n \in D \text{ e quase todos nulos } \}.$$

Logo, para $V := c_0(\mathbb{N})$, a topologia fraca* sobre V^* é métrizável pela função (a qual é uma métrica por Exercício 2.2) definida por

$$d(x,y) := \sum_{e_n} 2^{-n} \frac{|x - y(e)|}{1 + |x - y(e)|}$$

onde $e_1, e_2, \ldots$ é uma enumeração dos elementos em E. Logo a bola unitária em V^* é compacta pelo Teorema de Alaoglu, e é sequencialmente compacta pelo Teorema B.13.

Compacidade de Conjuntos em $\mathbb{R}$. Voltamos à Observação B.9 e mostramos o Teorema de Heine-Borel: Todo subconjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}$ é compacto.

Definição. Um corpo $\mathbf{K}$ é *localmente compacto* se para todo x em $\mathbf{K}$ existe uma *vizinhança compacta* de x, isto é, um subconjunto compacto que contém um aberto $V \ni x$.

Equivalentemente, $\mathbf{K}$ é localmente compacto se para todo x em $\mathbf{K}$ existe um subconjunto aberto $V \ni x$.tal que o seu fecho V^- seja compacto.

Para ver que $\mathbb{R}$ (e consequentemente $\mathbb{C}$) é localmente compacto, basta por Teorema B.13 mostrar que todo subconjunto limitado e fechado (tal como uma bola fechada $\bar{\mathrm{B}}(x, \epsilon)$) é sequencialmente compacto. Logo, por Proposição 2.16, basta mostrar que toda sequência limitada em $\mathbb{R}$ tem uma subsequência convergente.

Lema 2.76. *Toda sequência infinita em $\mathbb{R}$ tem uma subsequência monótona.*

Demonstração: Um índice n é um *pico* se $x_n > x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$. Se tem uma infinitude de picos $n_1, n_2, \ldots$, então $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, é uma subsequência monotonamente decrescente. Caso contrário, seja N o último pico. Isto é, para todo $n > \mathrm{N}$ existe $m > n$ com $x_m \geq x_n$. Seja $n_1 = \mathrm{N} + 1$; logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geq x_{n_1}$; semelhantemente para n_2 no lugar de n_1, e assim por diante se constrói uma subsequência (x_{n_k}) monotonamente crescente. □

Lema 2.77. *Toda sequência monótona e limitada converge; caso crescente ao seu supremo, caso decrescente ao seu ínfimo.*

Demonstração: Seja (x_n) monotonamente crescente e limitada. Seja $s = \sup\{x_n\}$ e $\epsilon > 0$. Logo existe N tal que $|s - x_\mathrm{N}| < \epsilon$. Pela monotonia, a fortiori $|s - x_n| < \epsilon$ para todo $n > \mathrm{N}$. Isto é, $x_n \to s$.

A demonstração é análoga para uma sequência monotonamente decrescente. □

Corolário 2.78. *Seja (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$. Se (x_n) é limitada, então tem uma subsequência convergente.*

Demonstração: Por Lema B.14 e Lema B.15. □

Corolário 2.79 (Teorema de Heine-Borel). *Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto se, e tão-somente se, é limitado e fechado.*

Demonstração: Como espaço métrico $\mathbb{R}$ é compacto se, e tão-somente se, é sequencialmente compacto pelo Teorema B.13.

$\Longleftarrow$: Pelo Corolário 2.78, toda sequência tem uma subsequência convergente. Como K é fechado, este limite é pela Proposição 2.16 em K. Logo K é sequencialmente compacto.

$\Longrightarrow$: Pela Proposição B.8, todo subconjunto compacto é fechado e limitado. □

Definição. Se X' e X'' são dois espaços topológicos com topologias τ' e τ'', então o conjunto dado pelo seu produto $X' \times X''$ é um espaço topológico cuja topologia τ é gerada pela base

$$\tau' \times \tau'' := \{U' \times U'' : U' \in \tau' \text{ e } U'' \in \tau''\};$$

isto é, U em τ se é união de conjuntos em $\tau' \times \tau''$, ou, equivalentemente, se para todo $u = (u', u'')$ em U existe $U' \times U''$ contido em U tal que $U' \ni u'$ em τ' e $U'' \ni u''$ em τ''.

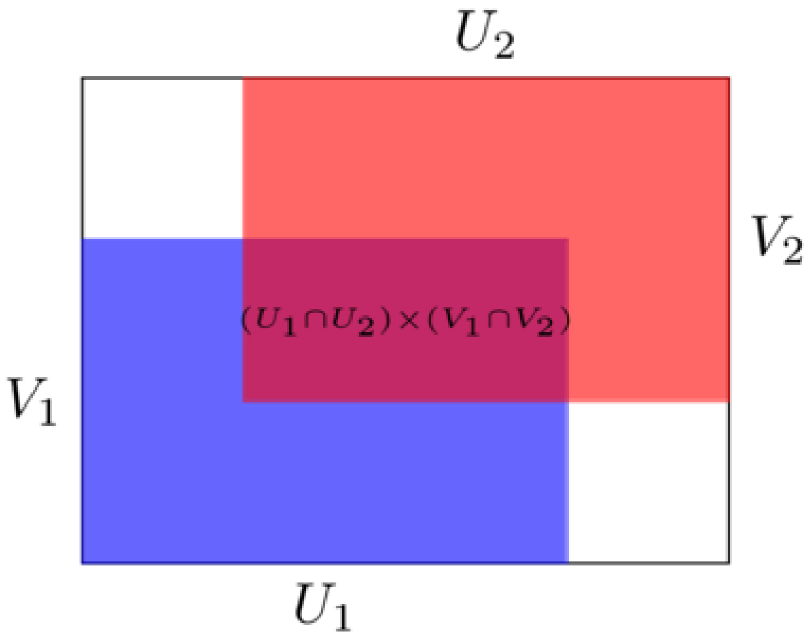

Figura 2.4: A topologia do produto é gerado pelos produtos de subconjuntos abertos. Observe-se que a interseção de dois produtos é de novo um produto!

Exercício 2.80 (Heine-Borel sobre $\mathbb{C}$). Sejam X' e X'' dois espaços topológicos. Mostra:

- Se X' e X'' são compactos, então $X' \times X''$ é compacto.
- Se X' e X'' são espaços métricos com métricas d' e d'', então a topologia de $X := X' \times X''$ é a induzida pela métrica $d := \max\{d', d''\}$.

- Se $X' = \mathbb{R}$ e $X'' = \mathbb{R}$ com as normas $\|\cdot\|' = |\cdot| = \|\cdot\|''$, então a norma do produto $\|\cdot\| = \max\{\|\cdot\|', \|\cdot\|''\}$ sobre $X := X' \times X''$ é equivalente à norma euclidiana dada por $(x', x'') \mapsto \sqrt[2]{x'^2 + x''^2}$. Em particular, as topologias dadas por $\|\cdot\|$ e pela norma euclidiana são as mesmas.

- Um subconjunto em $\mathbb{C}$ é compacto se, e tão-somente se, é fechado e limitado.

Exercício 2.81 (Heine-Borel sobre espaços vetoriais reais de dimensão finita). Mostra que um subconjunto em $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ para quaisquer número de fatores é compacto se, e tão-somente se, é fechado e limitado.

Corpos Locais. Lembremo-nos de que um corpo $\mathbf{K}$ é *localmente compacto* se para todo x em $\mathbf{K}$ existe uma vizinhança $V \ni x$ tal que o seu fechamento é compacto.

Por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ são $\mathbb{C}$ são localmente compactos (como produto topológico finito de $\mathbb{R}$). Mas há outros tipos de corpos localmente compactos cujo valor absoluto:

Definição. A função $|\cdot| \colon \mathbf{K} \to [0, \infty[$ é um *valor absoluto não-arquimediano* se ela satisfaz

- $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,

- $|xy| = |x||y|$, e

- $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Em comparação a um valor absoluto geral, a desigualdade triangular satisfeita por um valor absoluto não-arquimediano é mais forte, a *desigualdade triangular mais forte* ou *ultramétrica*. Em particular, um tal valor absoluto satisfaz $|n| \leq 1$ para todo n em $\mathbb{N}$; donde a nomeação *não-arquimediano*.

Definição. A função $v \colon \mathbf{K} \to]-\infty, \infty]$ é uma *valoração* se ela satisfaz

- $vx = -\infty$ se, e somente se, $x = 0$,

- $v(xy) = vx + vy$, e

- $v(x + y) \geq \min\{vx, vy\}$

Se $|\cdot|$ é um valor absoluto não-arquimediano, então para qualquer $c > 1$, a função $v := \log_c |\cdot|$ é uma valoração; e, vice-versa, se v é uma valoração, então para qualquer $c < 1$ a função $|\cdot| := c^{v(\cdot)}$ é um valor absoluto não-arquimediano.

Por exemplo, além do valor absoluto ordinário, existe o valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}$ e o seu completamento $\mathbb{Q}_p$.

Como que $\mathbb{Z}_p$, a bola unitária de $\mathbb{Q}_p$, é compacto; logo $\mathbb{Q}_p$ é localmente compacto (e semelhantemente $\mathbb{F}_p((t))$). Com efeito, todas as extensões finitas de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{F}_p((t))$ são localmente compactos (e de fato constituem com $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ todos tais corpos).

Exemplo.

- O corpo $\mathbf{K} = \mathbb{Q}_p$ com valoração $v(x) = n$ se $x = p^n \frac{x'}{x''}$ com $p \nmid x', x''$.
- O corpo $\mathbf{K} = \mathbb{F}_p((t))$ com valoração $v(x) = n$ se $x = a_n t^n + \cdots$ com $a_n \neq 0$.

Poderíamos concluir pelos exemplos que o valor absoluto $|\cdot|$ necessita um contorno da definição, mas é mais próximo do intuito (adquirido do cálculo real), enquanto a valoração é mais próxima da definição, ao custo do intuito.

Proposição 2.82 (Propriedades não-arquimedianas).

- *Se $x = x_1 + \cdots + x_n$ e existe i_0 em $\{1, \ldots, n\}$ tal que $|x_{i_0}| > |x_i|$ para $i \neq i_0$, então $|x| = |x_{i_0}|$;*
- *Se $x_n \to x$, então $|x_n| = |x|$ para n suficientemente grande.*
- *Se $\mathbf{K}$ é completo, então $\sum_n x_n$ converge se, e somente se, $x_n \to 0$.*

Demonstração:

- Observa que (o caso $n = 2$) se x, y em $\mathbf{K}$ e $|x| > |y|$, então $|x + y| \leq |x|$ e
$$|x| = |x + y - y| \leq \max\{|x + y|, |y|\},$$
então, como $|y| < |x|$, segue $|x| \leq |x + y|$. Concluímos $|x| = |x + y|$.
- Se $\epsilon < |x|$, então $|x - x_n| < \epsilon$ para n suficientemente grande; logo, pelo primeiro item, $|x_n| = |x|$.
- Pela desigualdade triangular mais forte,
$$|x_m + \cdots + x_M| \leq \max\{|x_m|, \ldots, |x_M|\} \to 0.$$

Seja $\mathbf{K}$ um corpo com valor absoluto não-arquimediano.

- O *anel dos inteiros* $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} := \{x \text{ em } \mathbf{K} \text{ tal que } |x| \leq 1\}$,
- o *ideal máximo* $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}} := \{x \text{ em } \mathbf{K} \text{ tal que } |x| < 1\}$, e
- o *corpo residual* $\mathbf{k}_{\mathbf{K}} := \mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$.

Notamos que $|x| = 1$ se, e somente se, $|x^{-1}| = 1$; por isso a união disjunta $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^* \cup \mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$; isto é, $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ é o ideal máximo local.

A valoração é *discreta* se $v(\mathbf{K}^*)$ é discreta em $\mathbb{R}$; se, e somente se, existe um c em $\mathbb{R}$ tal que $v(\mathbf{K}^*) = c\mathbb{Z}$; se, e somente se, existe um $\pi_{\mathbf{K}}$ em $\mathbf{K}$ que gera $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$.

Tal $\pi_{\mathbf{K}}$ é um *uniformizador* de $\mathbf{K}$.

Exemplo.

- Se $\mathbf{K} = \mathbb{Q}_p$, então $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathbb{Z}_p$, $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}} = p\mathbb{Z}_p$ e $\mathbf{k}_{\mathbf{K}} = \mathbb{F}_p$ (e $\pi_{\mathbf{K}} = p$), e
- Se $\mathbf{K} = \mathbb{F}_p((t))$, então $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathbb{F}_p[[t]]$, $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}} = t\mathbb{F}_p[[t]]$ e $\mathbf{k}_{\mathbf{K}} = \mathbb{F}_p$ (e $\pi_{\mathbf{K}} = t$).

Um corpo com um valor absoluto v é *local* se

- o espaço métrico induzido é completo, e
- a valoração v é discreta, e
- o corpo residual $\mathbf{k}_{\mathbf{K}}$ é finito.

Exemplo. Os corpos $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{F}_p((t))$ são completos.

Fato. *Temos*

$$\{ \textit{ corpos locais } \} = \{ \textit{ extensões finitas de } \mathbb{Q}_p \} \cup \{ \textit{ extensões finitas de } \mathbb{F}_p((t)) \}.$$

O seguinte teorema surpreende, porque a partir de uma propriedade inteiramente topológica, a compacidade local, nasce um valor absoluto. Este valor absoluto é dado pela *medida de Haar* que existe sobre qualquer grupo topológico localmente compacto.

Fato. *Temos*

$$\{ \textit{ corpos topológicos localmente compactos } \} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \cup \{ \textit{ corpos locais } \}.$$

Funções Contínuas. Tratamos as questões:

- Como a compacidade é preservada sob funções contínuas?
- Como a continuidade é "corroborada" pela compacidade?

Teorema 2.83. *Se $f\colon X \to \Omega$ é contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração: Como f é contínua, pré-imagens de conjuntos abertos são abertos. Logo as pré-imagens de toda cobertura de $f(X)$ são uma cobertura de X. Como X é compacto, existe um refinamento finito. As imagens deste refinamento são um refinamento finito de $f(X)$. □

Corolário 2.84. *Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto, então*

$$\sup\{f(x) : x \in X\} = \max\{f(x) : x \in X\} \text{ e } \inf\{f(x) : x \in X\} = \min\{f(x) : x \in X\}.$$

Demonstração: Como X é compacto, $f(X)$ é compacto por Teorema 2.83; em particular, $f(X)$ é fechado e limitado. Logo, por Proposição 2.16, o limite $\sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$ e o limite $\inf\{|f(x)| : x \in X\} > -\infty$ são em $f(X)$. □

Corolário 2.85. *Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é compacto, então*

$$\sup\{|f(x)| : x \in X\} = \max\{|f(x)| : x \in X\}$$

e

$$\inf\{|f(x)| : x \in X\} = \min\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Demonstração: Como $|\cdot|$ é contínua, $|f|$ é contínua por Proposição 2.33. Logo, é Corolário 2.84 aplicado à função contínua $|f|$. □

Corolário 2.86. *Seja $K \subseteq X$ e $x \in X$. Se K é compacto, então existe k em K tal que* $d(x,k) = d(x,K)$.

Demonstração: A função $f = d(x,\cdot)$ é contínua. Como K é compacto, assume o mínimo em um ponto k sobre K por Corolário 2.84. Logo $d(x,k) = d(x,K)$. □

Teorema 2.87. *Seja X um espaço métrico. Se $f\colon X \to \Omega$ contínua e X compacto, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Por contraposição: Seja f não uniformemente contínua e X compacto. Mostremos que f não é contínua. Como f não é uniformemente contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta = \frac{1}{n}$, existem x_n e y_n em X tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, mas $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Como X é compacto, por Teorema B.13, existe uma subsequência convergente (x_{n_k}) com $x_{n_k} \to x$. Como

$$d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0,$$

obtemos $y_{n_k} \to x$. Seja $\omega = f(x)$ Obtemos

$$\epsilon \leq d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(\omega, f(x_{n_k})) + d(f(y_{n_k}), \omega).$$

Logo, x_{n_k} e y_{n_k} convergem a x; porém, ou $(f(x_{n_k}))$, ou $(f(y_{n_k}))$, não converge a $\omega = f(x)$. Por Proposição B.5, f não é contínua em x. □

Seja X um espaço métrico. A *distância* entre dois subconjuntos A e B de X é

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Teorema 2.88. *Se* A *e* B *são disjuntos,* B *fechado e* A *compacto, então* $d(A, B) > 0$.

Demonstração: Seja $f \colon X \to [0, \infty[$ dada por $f = d(B, \cdot)$. Como $A \cap B = \emptyset$ e B fechado, $f(a) > 0$ para todo a em A por Proposição 2.36.(ii). Como A é compacto,

$$d(A, B) = \inf\{f(a) : a \in A\}$$

é assumido por um a_0 em A. Logo $d(A, B) = f(a_0) > 0$. □

Exercício 2.89.

(i) Seja $\mathbf{K}$ um corpo normado. Mostre que a bola unitária no espaço vetorial normado $\{(a_n) : \{|a_n|\}$ limitado $\}$ das sequências limitadas em $\mathbf{K}$ com a norma $\|(a_n)\| := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ não é compacta!

(ii) Mostre que a união de um número finito de subconjuntos compactos é compacta!

(iii) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico X e f uma função sobre X. Se f é uma função contínua e X fechado em $\mathbb{R}$, então $(f(x_n))$ é Cauchy.

2.7. Convergência Uniforme

Seja X um conjunto e (Ω, ρ) um espaço métrico. Sejam $f_1, f_2, \ldots : X \to \Omega$ funções. A sequência (f_n) converge *uniformemente* a f, denotado por $f_n \to f$ uniformemente, se para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $\rho(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo x em X e $n \geq N$; isto é,

$$\sup\{\rho(f_n(x), f(x)) : x \in X\} < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Teorema 2.90. *Seja* X *um espaço métrico. Se todos os f_n são contínuas e $f_n \to f$ uniformemente, então f é contínua.*

Demonstração: Seja x_0 em X e $\epsilon > 0$. Mostremos que existe $\delta > 0$ tal que $d(x_0, x) < \delta$ implica $\rho(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ para todo x em X.

Seja N tal que $\rho(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo x em X e $n \geq N$. Como f_N é contínua, em particular em x_0, existe $\delta > 0$ tal que $d(x_0, x) < \delta$ implica $\rho(f_N(x_0), f_N(x)) < \epsilon$ para todo x em X. Estimemos

$$\rho(f(x_0), f(x)) \leq \rho(f(x_0), f_N(x_0)) + \rho(f_N(x_0), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f(x)) \leq 3\epsilon$$

Sejam $f_1, f_2, \ldots : X \to \Omega$ funções. A sequência (f_n) é uniformemente *Cauchy*, se para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $\rho(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ para todo x em X e $n, m \geq N$.

Observação. Seja Ω um espaço vetorial normado. Seja B(X) o conjunto de todas as funções $f : X \to \Omega$ limitadas, isto é, tais que

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in S\} < \infty$$

com a métrica $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$. (Vide o espaço métrico B(S) de Exemplo 2.1.) Uma sequência (f_n) é convergente respectivamente Cauchy em B(X) se, e tão-somente se, ela é uniformemente convergente respectivamente uniformemente Cauchy.

Proposição 2.91. *Seja* X *um conjunto e* (Ω, ρ) *um espaço métrico. Seja* $f_1, f_2, \ldots : X \to \Omega$ *uma sequência de funções uniformemente Cauchy. Se* Ω *é completo, então* (f_n) *converge uniformemente a uma função* $f : X \to \Omega$.

Demonstração: Para todo x a sequência $f_n(x)$ é Cauchy, logo existe um limite. Defina $f : X \to \Omega$ por estes limites.

Seja $\epsilon > 0$ e x em X. Seja N tal que $\rho(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ para todo x em X e $n, m \geq N$; Pela continuidade da métrica

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f_n(x)) &= \rho(\lim_m f_m(x), f_n(x)) \\ &= \lim_m \rho(f_m(x), f_n(x)) \leq \max\{\rho(f_m(x), f_n(x)) : m \geq N\} < \epsilon;\end{aligned}$$

isto é, $f_n \to f$ uniformemente. □

Se f_1, f_2, ... são todas contínuas, então f é contínua por Teorema 2.90.

Definição. Seja Ω um espaço métrico que é um grupo abeliano; por exemplo, um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; em particular, $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Uma *série* $\sum u_n$ de funções u_1, u_2, ..., $: X \to \Omega$ *converge uniformemente* se a sequência (s_n) dos seus truncamentos finitos $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ converge uniformemente.

Teorema 2.92 (Teste de Weierstrass). *Sejam* $u_n \colon X \to \mathbb{C}$ *funções e* $M_n > 0$ *constantes para* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\|u_n\| = \sup\{|u_n(x)| : x \in X\} \leq M_n$ *para todo* n *e* $M_1 + M_2 + \cdots < \infty$, *então a série* $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ *converge uniformemente.*

Demonstração: Seja (s_n) a sequência dos truncamentos finitos $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ de $\sum u_n$. Como $\|u_n\| = \sup\{|u_n(x)| : x \in X\} \leq M_n$ para todo n e $M_1 + M_2 + \cdots < \infty$, a sequência s_n é uniformemente Cauchy. Logo, por Proposição 2.91, ela converge uniformemente. □

Exercício 2.93. Mostra que o espaço métrico B(S) de Exemplo 2.1 é completo!

Dica. Orienta-te na demonstração da Proposição 2.91.

Exercício 2.94. Seja (f_n) uma sequência de funções uniformemente convergente.

Mostre: Se f_1, f_2, ... são uniformemente contínuas, então o seu limite é uniformemente contínuo.

Questão: Se f_1, f_2, ... são Lipschitzianas, para quais cotas M_1, M_2 o seu limite é Lipschitziana?

3. Funções Diferenciáveis

Seja $\mathbf{K}$ um corpo normado (por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Todo espaço vetorial será definido sobre $\mathbf{K}$.

3.1. Funções Diferenciáveis sobre uma Reta

Lembremo-nos da definição da diferenciabilidade de funções em um único argumento: O leitor pense em $\mathbf{K} = \mathbb{R}$.

Definição 3.1. Seja G um subconjunto aberto em $\mathbf{K}$ e $f : \mathrm{G} \to \mathbf{K}$. A função f é *diferenciável (no ponto) a* se o limite

$$f'(a) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe; isto é, segundo Definição B.3, para a função $\mathrm{F}(h) \coloneqq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, definida sobre $\mathrm{B} - \{0\}$ onde B é uma bola em $\mathbf{K}$ em torno de 0, existe m em $\mathbf{K}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathrm{F}(h) - m| < \epsilon$$

para todo h não-nulo com $|h| < \delta$.

O escalar $f'(a) \coloneqq m$ em $\mathbf{K}$ é chamado de *diferencial* (ou *o valor da derivada*) de f em a.

A função f é *diferenciável* se é diferenciável em todo a em G e a função

$$\begin{aligned} f' : \mathrm{G} &\to \mathbf{K} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

é a *derivada* de f.

A função f é *duas vezes diferenciável* se f é diferenciável e a função f' é diferenciável; a derivada de $\mathrm{F} = f'$ é denotada por f'' ou $f^{(2)}$. Em geral, para todo k em $\mathbb{N}$, a função f é *k vezes diferenciável* se f é $k-1$ vezes diferenciável e $f^{(k-1)}$ é diferenciável (ou, equivalentemente, f é diferenciável e f' é $k-1$ vezes diferenciável).

A função f é *suave* se possui derivadas de todas as ordens.

O quociente, denotado *coeficiente angular*, $m_h \coloneqq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mede a *inclinação*, a proporção entre o numerador Δy e denominador Δx, que é visualizada em Figura 3.1. O coeficiente angular m_h é o valor da função tangente no ângulo α:

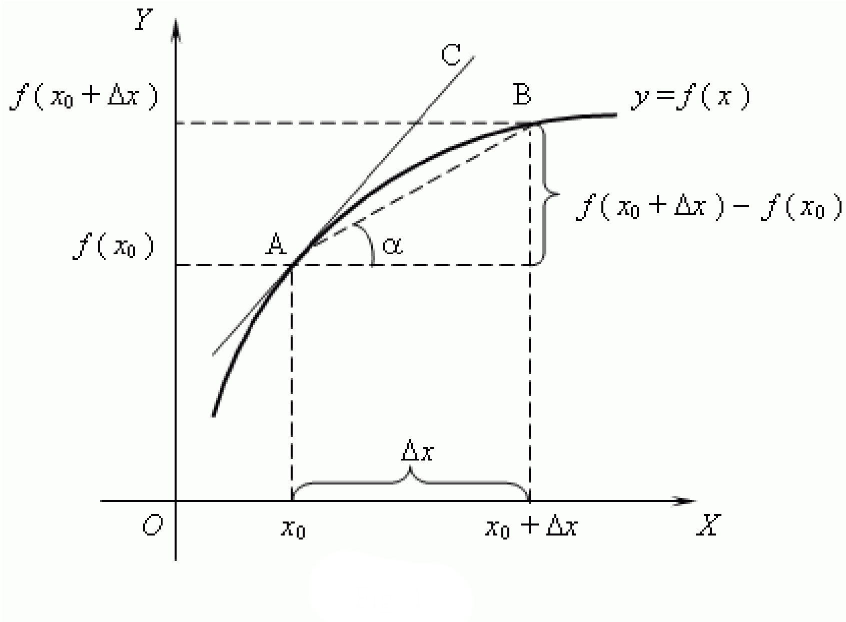

Figura 3.1: A inclinação como proporção $\Delta y/\Delta x$.

Exemplo 3.2. Por exemplo, todo polinómio é diferenciável. Se $f(z) = z^2$, calculamos

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \frac{z^2-w^2}{z-w} = z+w$$

O diferencial de f em a denote-se alternativamente por

$$f'(a) = f'(a)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=a} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right)_{x=a} = \mathrm{D}f(a) = \mathrm{D}_a f.$$

Neste ponto, o diferencial $m = f'(a)$ é um valor em $\mathbf{K}$, mas vemos de agora para diante que é mais elucidante interpretá-lo como a aplicação linear $h \mapsto mh$ sobre $\mathbf{K}$. Geometricamente, o diferencial interpreta-se pela tangente ao ponto $(a, f'(a))$ no plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; o gráfico da função afim $h \mapsto f(a)+mh$ sobre $\mathbb{R}$: Ao diminuir a distância h entre os pontos, a reta secante gira em torno do ponto $\mathrm{P} = (a, f(a))$, e obtemos no limite a inclinação da reta tangente

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \mathrm{F}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

como em Figura 3.2;

Veremos em breve que, em contraste a $\mathbb{R}$, uma função diferenciável sobre $\mathbb{C}$ é suave; mais, é analítica (localmente expansível em uma série de potências)!

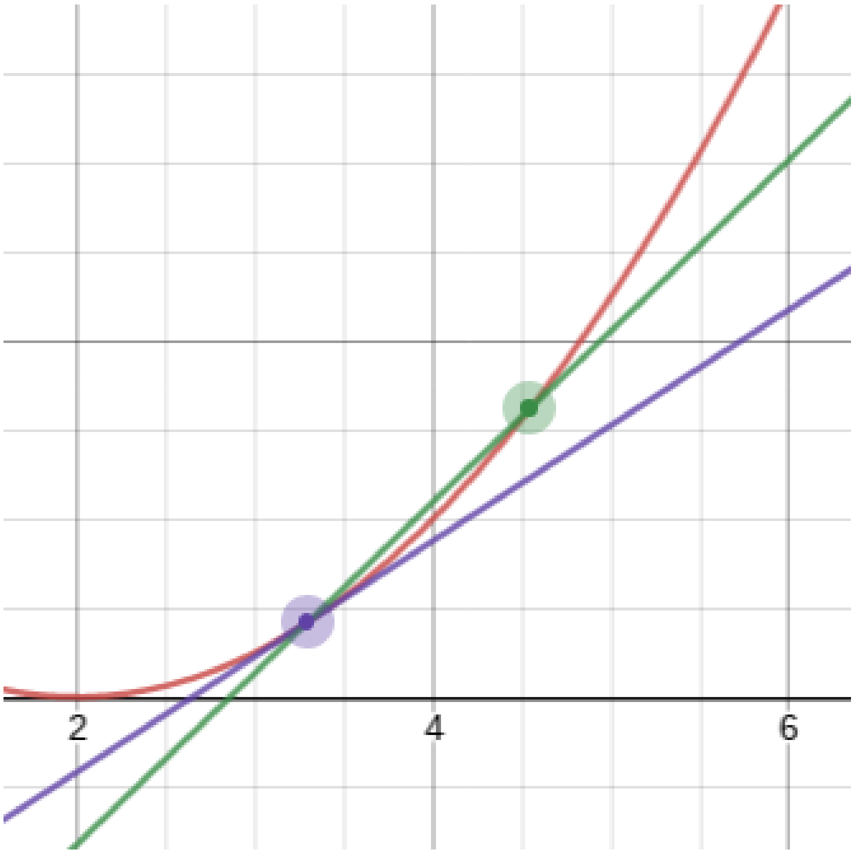

Figura 3.2: A reta secante (a reta verde) como aproximação à reta tangente (a reta violeta)

3.2. Funções diferenciáveis sobre Espaços Vetoriais

Recordemo-nos da definição de diferenciabilidade de uma função de múltiplos argumentos. O leitor pense no espaço vetorial $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbf{K} = \mathbb{R}$.

Definição 3.3 (Definição do Diferencial segundo Fréchet)**.** Sejam V e $\mathbf{E}$ espaços vetoriais normados, X um subconjunto aberto em V e $f : X \to \mathbf{E}$. A função f é *diferenciável* no ponto $a \in X$ se existe uma aplicação linear contínua $A \colon V \to \mathbf{E}$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + R(h) \qquad \text{com } \|R(h)\| = o(\|h\|);$$

isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in V$ com $\|h\| < \delta$,

$$\|R(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

A aplicação linear A é chamada de *diferencial (total)* de f em a e é denotada por $f'(a)$, $\mathrm{d}f(a)$ ou $\mathrm{D}_a f$.

A função f é *diferenciável* se é diferenciável em todo a em X.

Observação. Observamos que podemos desta forma interpretar a notação ubíqua $\mathrm{d}x$ pelo diferencial da função id_V para $V = \mathbf{K}$ onde denotemos, como usual, id pelo valor do seu argumento x, isto é, $\mathrm{id} = x$. Logo, a maneira matematicamente mais rigorosa de pensar de $\mathrm{d}x$ é como a derivada $X \ni x \mapsto \mathrm{id}_K$ com valores nas aplicações $\mathbf{K}$-lineares $T\colon V \to V$ de $V = \mathbf{K}$.

Observemos que a aplicação linear e contínua A é univocamente definida: Se A' e A'' satisfaçam as condições de Definição 3.1, então existe para todo $\epsilon > 0$ um $\delta > 0$ tal que $A = A' - A''$ satisfaz $\|A(h)\| < \epsilon\|h\|$ para todo h com $|h| < \delta$, logo, $\|A\| < \epsilon$ para todo ϵ, isto é, $A' = A''$.

Usualmente, V e $\mathbf{E}$ são espaços vetoriais normados de dimensão finita. Logo, toda aplicação linear é contínua por Exercício 2.50.

Exercício 3.4. Seja $V = M(n \times n, \mathbf{K})$ o espaço vetorial das $n \times n$-matrizes com entradas em $\mathbf{K}$ e $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ o subconjunto aberto (como pré-imagem $\det^{-1} K^*$ do complemento de $\{0\}$) das matrizes invertíveis. Seja $\iota\colon G \to G$ a inversão $g \mapsto g^{-1}$. Mostra que $\mathrm{D}_g \iota = -g^{-1} \cdot g^{-1}$!

Dica. Observa que $\iota \cdot \iota\colon G \to G$, a função dada pelo produto matricial dos valores de ι em cada ponto, é constante, e aplica a regra do produto!

Proposição 3.5. *Sejam* V *e* $\mathbf{E}$ *espaços vetoriais normados,* X *um subconjunto aberto em* V *e* $f\colon X \to \mathbf{E}$. *Se* $V = \mathbf{E} = \mathbf{K}$, *então Definição 3.1 e Definição 3.3 são equivalentes; isto é, existe o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se, e tão-somente se, existe uma aplicação linear $A\colon V \to \mathbf{E}$ *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + R(h) \qquad \textit{com } \|R(h)\| = o(\|h\|).$$

Demonstração: Seja $f\colon X \to \mathbf{K}$ e A em $\mathbf{K}$. Para todo $\epsilon > 0$, $a + h$ e a em X com h não-nulo, por multiplicatividade de $|\cdot|$,

$$\left|f(a+h) - f(a) - Ah\right| < \epsilon|h|. \quad \text{se, e tão-somente se,} \quad \left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A\right| < \epsilon \tag{$*$}$$

Demonstremos a ida ($\Longrightarrow$) e recíproca ($\Longleftarrow$):

Ad $\implies$: Denote

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{em } \mathbf{K}.$$

Seja $A \colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ dada por

$$v \mapsto f'(a)v.$$

Seja $\epsilon > 0$. Pela definição da existência de $f'(a)$ e pela equivalência $(*)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo h em $\mathbf{K}$ com $|h| < \delta$,

$$\left| f(a+h) - f(a) - A(h) \right| < \epsilon |h|.$$

Isto é, Definição 3.3 é satisfeita.

Ad $\impliedby$: A aplicação linear $A \colon \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ é dada por multiplicação por $\lambda = A(1)$ em $\mathbf{K}$; põe $f'(a) := \lambda$. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de

$$f(a+h) - f(a) - A(h) = o(|h|),$$

e pela equivalência $(*)$ para $A = f'(a)$, existe $\delta > 0$ tal que para todo h em $\mathbf{K}$ não-nulo com $|h| < \delta$,

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon.$$

Isto é, Definição 3.1 é satisfeita. □

O número $f'(a)$ e a aplicação linear A correspondem geometricamente sobre a reta $\mathbb{R}$ da seguinte maneira: O número $m = f'(a)$ é a inclinação da tangente do gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. A reta dada pela tangente é o gráfico da função afim

$$a + h \mapsto f(a) + A(h)$$

onde A é a função linear $h \mapsto m \cdot h$ com $m = f'(a)$ a inclinação.

Proposição 3.6. *Sejam* V *e* $\mathbf{E}$ *espaços vetoriais normados,* X *um subconjunto aberto em* V *e* $f \colon X \to \mathbf{E}$. *Se* f *é diferenciável em* a *em* X, *então* f *é contínua em* a.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Existe uma aplicação linear contínua $A \colon V \to \mathbf{E}$ (independente de ϵ) e $\delta > 0$ (dependente de ϵ) tal que, para todo $h \in V$ com $\|h\| < \delta$,

$$f(a+h) - f(a) = A(h) + R(h) \qquad \text{com } \|R(h)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Como A é contínua e linear, é limitada, isto é, existe $M \geq 0$ tal que $\|A(h)\| \leq M\|h\|$. Logo

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq (M+\epsilon)\|h\|$$

Logo, f é Lipschitziana para $M + \epsilon$ sobre $B(a, \delta)$; em particular, é contínua em a. □

Exercício 3.7. Mostra que a função $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ é contínua, mas não é diferenciável em 0. Vide Figura 3.3.

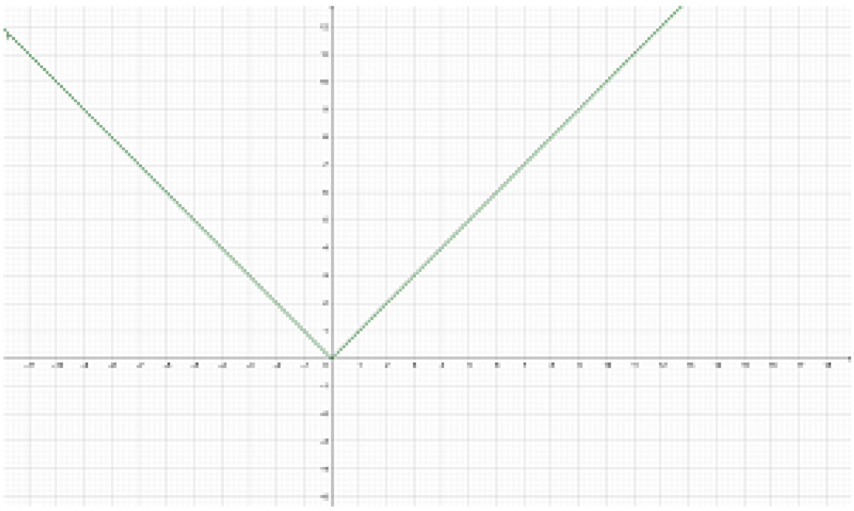

Figura 3.3: O gráfico do valor absoluto sobre $\mathbb{R}$ em volta de 0.

Proposição 3.8. *Sejam* V, W *e* U *espaços vetoriais normados,* X *em* V *e* Y *em* W *abertos e* $f\colon X \to V$ *e* $g\colon Y \to U$ *com* $f(X) \subseteq Y$. *Se* f *é diferenciável em* a *em* X *e* g *é diferenciável em* $b = f(a)$ *em* Y, *então* $g \circ f$ *é diferenciável em* a *com diferencial total* $D_a(g \circ f) = D_b g \circ D_a f$.

Demonstração: Sejam

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + R(h) \quad \text{e} \quad g(b+i) = g(b) + B(i) + S(i)$$

para todo $a + h$ a em X e $b + i$, b em Y para aplicações lineares e contínuas $A\colon V \to W$ e $B\colon W \to U$ (e R sobre X e S sobre Y definidas implicitamente por estas equações). Calculemos

$$\begin{aligned} g \circ f(a+h) - g \circ f(a) &= g(f(a) + A(h) + R(h)) - g(f(a)) \\ &= g(f(a)) + B(A(h) + R(h)) + S(A(h) + R(h)) \\ &= g(f(a)) + C(h) + B(R(h)) + S(A(h) + R(h)) \end{aligned}$$

onde pusemos $C \coloneqq B \circ A$.

Como B é contínua e linear, existe $N \geq 0$ tal que $\|B(h)\| \leq N\|h\|$ para todo h em W. Logo

$$\begin{aligned}\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - C(h)\| &= \|B(R(h) + S(A(h) + R(h))\| \\ &\leq N\|R(h)\| + \|S(A(h) + R(h))\|.\end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$. Como g é diferenciável em b, existe $\delta > 0$ tal que $\|S(h)\| < \epsilon\|h\|$ para todo h em W com $\|h\| < \delta$.

Como f é diferenciável em a, existe $\gamma > 0$ tal que $\|R(h)\| < \delta\|h\|$ para todo h em V com $\|h\| < \gamma$. Como A é contínua e linear, existe $M \geq 0$ tal que $\|A(h)\| \leq M\|h\|$ para todo h em V. Logo

$$\|A(h) + R(h)\| \leq (M + \delta)\|h\| < (M + \delta)\gamma$$

para todo h em V com $\|h\| < \gamma$. Logo, se γ tal que $(M + \delta)\gamma < \delta$,

$$N\|R(h)\| + \|S(A(h) + R(h))\| \leq N\delta\|h\| + \epsilon\|h\| = (N\delta + \epsilon)\|h\|.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$,

- escolhamos δ tal que $N\delta + \epsilon < \epsilon$, e
- escolhamos γ para este δ tal que $(M + \delta)\gamma < \delta$

para obter que $g \circ f$ é diferenciável em a com diferencial total $C = B \circ A$. □

Se uma função f é constante e diferenciável, então a sua derivada é nula. Vice-versa:

Proposição 3.9. *Sejam* V *e* **E** *espaços vetoriais normados,* X *um subconjunto aberto em* V *e* $f\colon X \to \mathbf{E}$. *Se* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, *o domínio* X *é conexo e* $\dim V < \infty$, *a função* f *é diferenciável e* $f' = 0$, *então* f *é constante.*

Demonstração: Sejam v e $v + h$ em X. Como V é conexo, por Teorema 2.59, existem segmentos ligados que conectam v e $v + h$; suponhamos primeiro que $[v, v + h]$ é um destes segmentos.

Define $\phi\colon \mathbb{R} \to V$ por $t \mapsto v + th$. Como ϕ é diferenciável, e f é diferenciável pela hipótese, pela Proposição 3.8 $F = f \circ \phi\colon \mathbb{R} \to \mathbf{E}$ é diferenciável.

Como $f' = 0$, pela Proposição 3.8 $F' = 0$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, $f(v) = f(v + h)$.

Se v e $v+h$ são conectados por um caminho poligonal

$$P = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n].$$

com $z_0 = v$ e $z_n = v + h$, então

$$f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(z_{n-1}) = f(z_n).$$

Como v e $v+h$ em foram arbitrários, f é constante. □

Proposição 3.10. *Sejam* V *um espaço vetorial normado,* X *e* Y *subconjuntos abertos em* V *e sejam* $f\colon X \to V$ *e* $g\colon Y \to V$. *Se* $f(X) \subseteq Y$ *e* $g \circ f = \mathrm{id}$, *a função* f *contínua e* g *é diferençável em* $b = f(a)$ *tal que* $D_b g$ *é invertível, então* f *é diferençável em* a *e*

$$D_a f = (D_{f(a)} g)^{-1}.$$

Demonstração: Se f é diferenciável, então $D_a f = (D_{f(a)} g)^{-1}$ por Proposição 3.8.

Mostremos que f é diferenciável em a. Seja

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + R(h)$$

para todo $a+h$ e a em X para a aplicação linear e contínua $A \coloneqq B^{-1}\colon V \to V$ e R sobre X contínua, em particular, $R(h) \to 0$ para $h \to 0$. Precisamos de mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que $\|R(h)\| < \epsilon \|h\|$ para todo h em V com $\|h\| < \gamma$.

Pela hipótese, g é diferenciável em b, isto é, existe uma aplicação linear contínua $B\colon V \to V$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in V$ com $\|g\| < \delta$,

$$g(b+h) - g(b) = B(h) + S(h) \quad \text{com } \|S(h)\| \leq \varepsilon \|h\|. \tag{$*$}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} h = a + h - a = g \circ f(a+h) - g \circ f(a) \\ &= g(f(a) + A(h) + R(h)) - g(f(a)) \\ &= g(f(a)) + B(A(h) + R(h)) + S(A(h) + R(h)) - g(f(a)) \\ &= B(R(h)) + S(A(h) + R(h)) \\ &= h + B(R(h)) + S(A(h) + R(h)). \end{aligned}$$

Isto é,

$$R(h) = -A(S(A(h) + R(h))).$$

Seja $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que (∗) vale. Como R e A são contínuas, existe $\gamma > 0$ tal que $\|A + R(h)\| < \delta$ para todo h em V com $\|h\| < \gamma$. Por (∗),

$$\|S((A + R)(h))\| < \epsilon\|(A + R)(h)\| \leq \epsilon M\|A\|\|h\| + \|R(h)\|.$$

Logo

$$\|R(h)\| \leq \epsilon\|A\|^2\|h\| + \epsilon\|A\|\|R(h)\|,$$

equivalentemente,

$$\|R(h)\| \leq M\epsilon\|h\| \quad \text{com } M := \frac{\|A\|^2}{1 - \epsilon\|A\|}.$$

Logo, por uma escolha suficientemente pequena de $\gamma > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{M}$, temos $\|R(h)\| < \epsilon$ para todo h em V com $\|h\| < \gamma$; isto é, f é diferenciável em a. □

3.3. Equações de Cauchy-Riemann

A condição de diferenciabilidade de uma função f (em um ponto a) depende do corpo $\mathbf{K}$ sobre o qual o espaço vetorial que contém o domínio e contra-domínio de f é definido. Quanto maior o corpo $\mathbf{K}$, mais restritiva é a condição que o diferencial total de f (no ponto a) seja linear para $\mathbf{K}$ (= comuta com a multiplicação escalar em $\mathbf{K}$); portanto, mais restritiva a condição de diferenciabilidade de f.

Derivadas Parciais. Seja $X \subseteq V$ um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado V. Dada uma função $f\colon X \to E$ e a em X, Definição 3.3 e Proposição 3.8 aplicam-se em particular à função

$$F = f \circ H \quad \text{com } H\colon [-\epsilon, \epsilon] \to V \text{ definida por } t \mapsto a + t \cdot h$$

para h em V e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para garantir $H([-\epsilon, \epsilon]) \subseteq X$. Obtemos

$$F'(0) = D_a f \cdot h$$

Observação 3.11. Seja $X \subseteq V$ um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado V, seja $f\colon X \to E$ e a em X. Temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = D_a f \cdot h.$$

Em particular, para $h = e_1, \ldots, e_d$ os vetores da base canónica de $V = \mathbf{K} \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}$ cujas entradas são todas nulas exceto a primeira, …, última com valor 1, obtemos as derivadas parciais

$$\mathrm{D}_a f e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \mathrm{D}_a f e_d = \frac{\partial f}{\partial x_d}.$$

Corolário 3.12. *Seja $X \subseteq V$ um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado $V = \mathbf{K} \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}$ de dimensão d, seja $f \colon X \to E$ e a em X. As derivadas parciais de f*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \text{ são dadas pelas colunas da matriz } \mathrm{D}_a f$$

para a base canónica $e_1, \ldots, e_d$ de V.

A matriz dada por esta base chama-se a *matriz jacobiana* no ponto a.

Endomorfismos sobre a Reta Complexa como Endomorfismos sobre o Plano. Todo w em $\mathbb{C}$ define por multiplicação

$$W \colon z \mapsto w \cdot z$$

um *endomorfismo* ou *transformação linear*, uma aplicação linear W sobre o espaço vetorial $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ com valores em V. Se escrevemos $w = a + b \cdot i$, temos

$$W = a \cdot E + b \cdot I$$

onde E é a identidade sobre V e I a multiplicação por i sobre V. Se fixarmos a base 1 e i de $\mathbb{C} = V$, então as matrizes para esta base têm a forma

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Observação 3.13. Uma transformação m linear sobre $\mathbb{R}$ de V é linear sobre $\mathbb{C}$, isto é, dada por multiplicação por algum z em $\mathbb{C}$ se, e tão-somente se, a sua matriz para a base 1 e i é da forma

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

para algum u e v em $\mathbb{R}$; neste caso, $z = u + iv$.

Derivada Complexa como Endomorfismo sobre o Plano. Se uma função f é diferenciável em um ponto a em $\mathbb{C}$ como função de uma variável, então a condição da diferenciabilidade de f em a inclui que o diferencial $D_a f$ como limite para $h \to 0$ não depende da direção de h, em particular, de se h se situa no eixo-x ou eixo-y, implicando as *Condições de Cauchy-Riemann*; em mais detalhes:

Seja G um subconjunto aberto em $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, e $f = u + iv \colon G \to V$. Seja f é diferenciável em a em G, isto é, diferenciável como função de dois argumentos reais com valores em pares reais; mais precisamente, existe uma aplicação $A = D_a f \colon V \to V$ *linear sobre* $\mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + Ah + R(h) \quad \text{com } \|R(h)\| < \epsilon \|h\|$$

para todo h em V com $\|h\| < \delta$. Por Observação 3.13, a função f é diferenciável em a como função em um argumento complexo se, e tão-somente se,

$$D_a f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

é uma aplicação M *linear sobre* $\mathbb{C}$, isto é, dada por multiplicação

$$M \colon z \mapsto m \cdot z \quad \text{com } m \text{ em } \mathbb{C}.$$

onde $m = f'(a) = u'(a) + iv'(a)$. Isto é, ao escrevermos $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, se, e tão-somente se, $D_a f$ para a base 1 e i de $\mathbb{C} = V$ é dada pela matriz

$$D_a f = \begin{pmatrix} u'(a) & -v'(a) \\ v'(a) & u'(a) \end{pmatrix}.$$

Isto é, por Corolário 3.12, se, e tão-somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} u'(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} -v'(a) \\ u'(a) \end{pmatrix}$$

Teorema 3.14 (Equações de Cauchy-Riemann). *Seja* G *um subconjunto aberto em* $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, *e seja* $f \colon G \to V$ *diferenciável como função de dois argumentos reais em* a *em* G. *A função* f *é diferenciável como função de um argumento complexo se, e tão-somente se, ela satisfaz as equações de Cauchy-Riemann*

$$\Re \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \Im \frac{\partial f}{\partial y}(a) \quad e \quad \Im \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -\Re \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

3.4. Aplicações Conformais no Plano Complexo

Uma aplicação entre dois planos é *conformal* se preserva os ângulos (e a sua orientação) entre os vetores. Podemos visualizar aplicações sobre o plano (complexo) com valores no plano por dar uma cor a cada ponto no plano e observar a onde este ponto, identificável pela sua cor imutável, é enviado.

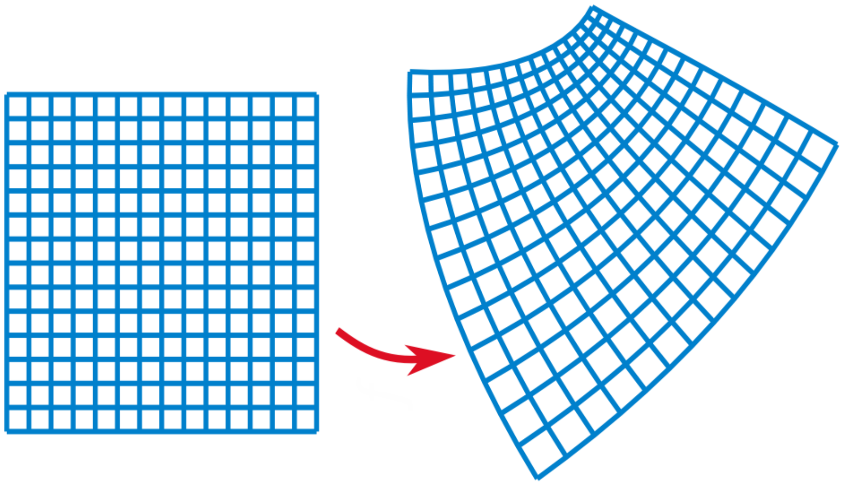

Figura 3.4: Uma aplicação conformal preserva ângulos retos, porém, distorce paralelepípedos.

Mostraremos que toda aplicação derivável sobre $\mathbb{C}$

- é conformal, e
- escala (ou expande) todo vetor pelo mesmo fator.

Aplicações Lineares Ortogonais. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um *produto interno* sobre um espaço vetorial V, isto é, uma aplicação $V \times V \to \mathbf{K}$ que

- é simétrica, isto é, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo v, w em V e
- é bilinear, isto é, linear em ambas as entradas (equivalentemente, pela simetria, em uma delas), e

Teorema 3.15. *Para todo produto interno existe uma base* ortogonal $\{e_i\}$, *isto é, uma base tal que*

$$\langle e_i, e_j \rangle = 1 \quad \textit{se } i \neq j.$$

Demonstração: Pelo algoritmo de Gram-Schmidt: Dada qualquer base $\{w_i\}$, constrói-se a base ortogonal por

$$\begin{aligned}
v_1 &= w_1 \\
v_2 &= w_2 - \frac{\langle v_1, w_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\
v_3 &= w_3 - \frac{\langle v_1, w_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\
&\vdots \\
v_n &= w_n - \frac{\langle v_1, w_n \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_n \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \cdots - \frac{\langle v_{n-1}, w_n \rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1} \rangle} v_{n-1} \\
&= w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, w_n \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.16. *Se* **K** *possui* raízes quadráticas, *isto é, para todo* Λ *em* **K** *existe* $\lambda = \sqrt[2]{\Lambda}$ *em* **K** *com* $\lambda^2 = \Lambda$, *então para todo produto interno existe uma base* ortonormal $\{e_i\}$, *isto é, uma base tal que*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \textit{se } i = j \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Seja $\{f_i\}$ uma base ortogonal obtida por Teorema 3.15; põe $e_i := \frac{1}{\sqrt[2]{\Lambda_i}} f_i$ com $\Lambda_i = \langle f_i, f_i \rangle$. □

Um *produto escalar* sobre um espaço vetorial real V é um produto interno que

- é positivo, isto é $\langle v, v \rangle > 0$ para todo v em V não-nulo.

Por exemplo, o produto euclidiano sobre $V = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$ definido por

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

é um produto escalar. Chamemos o espaço vetorial $V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ com o produto euclidiano o *plano euclidiano.*

Para um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtemos uma norma $\|\cdot\|$ por

$$\|v\| := \sqrt[2]{\langle v, v \rangle}.$$

Para $V = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$, obtemos a interpretação geométrica

$$\langle v, w \rangle \coloneqq \cos\theta \|v\| \|w\| \quad \text{para todo } v, w \in V$$

onde θ é o ângulo entre v e w.

Exercício 3.17. Mostra para $V = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

$$\langle v, w \rangle \coloneqq \cos\theta \|v\| \|w\| \quad \text{para todo } v, w \in V$$

usando a definição de $\cos = \Re \exp(i\cdot)$.

Definição. Dado um espaço vetorial V com um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, uma transformação linear A sobre V (= aplicação linear com domínio e contradomínio V) é *ortogonal* se

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{para todo } v, w \in V$$

Observação. Seja A uma transformação linear sobre um espaço vetorial V sobre **K**. Se $2 \neq 0$ em **K**, então A é ortogonal se, e tão-somente se, é *isométrica*, isto é,

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle \quad \text{para todo } v \in V.$$

Em particular, se $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, então A e V é de dimensão finita, então A é ortogonal se, e tão-somente se, A preserva a norma $\|\cdot\|$ sobre V. Isto é, se preserva os comprimentos de todos os vetores, então preserva os ângulos entre os vetores.

Demonstração: Se A é ortogonal, em particular,

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

Se A é isométrica, pela simetria e bilinearidade

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$$

Logo, se $2 \neq 0$,

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left[\|v + w\|^2 - (\|v\|^2 + \|w\|^2) \right].$$

Logo, se A preserva $\|\cdot\|$, então preserva $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Descrevamos as matrizes de aplicações lineares ortogonais sobre o plano, em particular, sobre o plano real $V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ para a base canónica e_1 e e_2:

Proposição 3.18. *Se* V *é bidimensional, então* A *é ortogonal se, e tão-somente se,*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \; \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \textit{com } a^2 + b^2 = 1$$

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortogonal fornecida por Teorema 3.15. Se A é ortogonal, então

$$\langle \mathrm{A}e_i, \mathrm{A}e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então obtemos as equações

$$a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1 \text{ e } ab + cd = 0.$$

Logo $a^2 b^2 = c^2 d^2$, logo

$$a^2(1 - d^2) = (1 - a^2) d^2$$

Logo, $d = \pm a$, e, da mesma maneira, $c = \pm b$. Por $ab = -cd$, se $d = a$, então $c = -b$, e se $d = -a$, então $c = b$. Logo, obtemos

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{com } a^2 + b^2 = 1$$

Corolário 3.19. *Se* A *é uma aplicação linear ortogonal sobre o plano euclidiano real* $\mathrm{V} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, *então existe* θ *em* $[-\pi, \pi[$ *tal que, para a base canónica,*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \textit{ se } \det \mathrm{A} > 0 \quad \textit{ou} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \textit{ se } \det \mathrm{A} < 0.$$

Demonstração: Por Proposição 3.18, como $a^2 + b^2 = 1$, obtemos a e b em $[-1, 1]$. Como cos é sobrejetor, podemos escrever $a = \cos\theta$ para $\theta \in [-\pi, \pi[$ e, pela relação $\cos^2 + \sin^2 = 1$, obtemos $b = \pm \sin\theta$. □

Aplicações Lineares que preservam ângulos.

Para um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre um espaço vetorial real V, obtemos uma norma $\|\cdot\|$ por

$$\|v\| := \sqrt[2]{\langle v, v \rangle} \geq 0.$$

Para $V = \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$ e o produto escalar euclidiano, obtemos a interpretação geométrica

$$\langle v, w \rangle := \cos\theta \|v\| \|w\| \quad \text{para todo } v, w \in V$$

onde θ é o ângulo entre v e w. Logo

$$\cos\theta := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad \text{para todo } v, w \in V \text{não-nulos.}$$

Observe que $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ é definido independente do corpo $\mathbf{K}$ possuir, o que nos permite definir:

Definição. Seja V um espaço vetorial com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma transformação linear A sobre V (= aplicação linear com domínio e contra-domínio V) *preserva ângulos* se

$$\frac{\langle Av, Aw \rangle^2}{\|Av\|^2 \|Aw\|^2} = \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2 \|w\|^2} \quad \text{para todo } v, w \in V.$$

Observamos que a aplicação cos preserva o módulo, mas não preserva a *orientação* do ângulo, o seu sinal em $[-\pi, \pi[$. Equivalentemente, cos não preserva a ordem dos dois vetores: o ângulo entre os vetores v e w e w e v é considerado igual.

Para fixar terminologia, para nós, uma aplicação que *preserva ângulos* preserva o módulo do ângulo, mas não necessariamente a sua orientação. (Uma aplicação que preserva o módulo do ângulo e a sua orientação será chamada de *conformal*.)

Por exemplo, se $A = \lambda B$ com λ em $\mathbf{K}$ e B ortogonal, então A preserva ângulos, mas não é ortogonal. Mostremos que (quando K possui raízes quadráticas) estes exemplos já constituem todos os exemplos de aplicações que preservam ângulos, mas não são ortogonais:

Proposição 3.20. *Se* V *é de dimensão finita e* $\mathbf{K}$ *possui raízes quadráticas, então uma aplicação linear* A *preserva ângulos se, e tão-somente se, existem* λ *em* $\mathbf{K}$ *e uma aplicação linear ortogonal* B *tais que* $A = \lambda B$.

Demonstração: Se existem λ em $\mathbf{K}$ e uma aplicação linear ortogonal B tais que $A = \lambda B$, então A é preserva ângulos.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal obtida por Corolário 3.16. Descrevamos a matriz de A para ela: Se A é preserva ângulos, então para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} \Lambda_i, & \text{para algum } \Lambda_i \in \mathbf{K} \text{ se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como
$$\langle e_i - e_j, e_i + e_j\rangle = \langle e_i, e_i\rangle - \langle e_j, e_j\rangle = 1 - 1 = 0,$$
obtemos
$$\langle A(e_i - e_j), A(e_i + e_j)\rangle = \langle Ae_i, Ae_i\rangle - \langle Ae_j, Ae_j\rangle = 0,$$
Isto é, $\Lambda_i = \Lambda_j =: \Lambda$. Logo, se λ satisfaz $\lambda^2 = \Lambda$, então $A = \lambda B$ com B ortogonal. □

Aplicações Lineares Conformais. Uma transformação linear A sobre V (= aplicação linear com domínio e contra-domínio V) é *conformal* se *preserva ângulos* e preserva a *orientação*; por exemplo, se V é o plano euclidiano, então a aplicação que troca os vetores da base canónica preserva ângulos, mas inverte a orientação.

Definição. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ com um produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Uma transformação linear A sobre V (= aplicação linear com domínio e contra-domínio V) é *conformal* se *preserva ângulos* e preserva a *orientação*, isto é, se
$$\frac{\langle Av, Aw\rangle^2}{\|Av\|^2\|Aw\|^2} = \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2} \quad \text{para todo } v, w \in V \quad \text{e} \quad \det A > 0.$$
Ela é *anti-conformal* se *preserva ângulos* e inverte a *orientação*, isto é, se
$$\frac{\langle Av, Aw\rangle^2}{\|Av\|^2\|Aw\|^2} = \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|v\|^2\|w\|^2} \quad \text{para todo } v, w \in V \quad \text{e} \quad \det A < 0.$$

Exemplo. Por exemplo, se V é o plano euclidiano, então a aplicação que troca os vetores da base canónica é anti-conformal.

Corolário 3.21. *Se* V *é o plano euclidiano, então uma aplicação linear* A *é conformal se, e tão-somente se, a sua matriz é dada para uma base de* V *por*
$$A = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \textit{com } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ e } \theta \in [-\pi, \pi[$$
Isto é, se, e tão-somente se, A *é uma rotação.*

Demonstração: Por Corolário 3.19 e Proposição 3.20. □

Aplicações Lineares Complexas. Se fixarmos a base canónica dada por 1 e i de $\mathbb{C} = V$, então a matriz de toda transformação linear sobre $\mathbb{R}$ de V que é linear sobre $\mathbb{C}$, isto é, dada por multiplicação $w \mapsto zw$ com $z = u + iv$ em $\mathbb{C}$ com u e v em $\mathbb{R}$, é da forma
$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$
Se escrevemos $z = r \cdot e^{i\theta}$ para $r = |z| \in \mathbb{R}$ e $i \in [0, 2\pi[$ e $r \in [0, \infty[$, então a transformação linear $v \mapsto r \cdot (e^{i\theta} \cdot v)$ tem a matriz

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Isto é, é a composição de

- um escalamento $e^r \cdot$, e
- uma rotação no plano com ângulo θ.

Teorema 3.22. *Uma transformação linear sobre $\mathbb{R}$ do plano real $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é conformal se, e tão-somente se, é linear sobre $\mathbb{C}$ sobre a reta complexa $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Por Corolário 3.21, uma aplicação no plano é conformal se, e tão-somente se, é composição de uma rotação e expansão. Logo, por (3.1), se, e tão-somente se, é dada por multiplicação complexa. □

Funções Diferenciáveis Conformais. Agora que definimos a conformalidade de uma aplicação linear, definimo-la para uma função diferenciável em um ponto pela aplicação linear dada pelo seu diferencial total:

Definição 3.23. Seja V um espaço vetorial e G em V aberto. Um *caminho* γ de G é uma função contínua
$$\gamma : B \to G$$
para alguma Bola B em $\mathbf{K}$ em torno de 0.

Definição 3.24. Se γ e η são dois caminhos diferençáveis em 0 com $\gamma(0) = a = \eta(0)$ e $\gamma'(0), \eta'(0) \neq 0$, então o (co-seno do) *ângulo* entre γ e η é

$$\angle(\gamma, \eta) := \frac{\langle \gamma'(0), \eta'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \|\eta'(0)\|}$$

Se γ é diferenciável em 0 e $f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{V}$ é diferenciável em $a = \gamma(0)$, então

$$\gamma_f \coloneqq f \circ \gamma$$

é diferenciável com $\gamma_f'(0) = f'(a)\gamma'(0)$.

Definição 3.25. Seja V um espaço vetorial e G em V aberto. Uma função $f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{V}$ *preserva ângulos* em a em G, se

$$\angle(\gamma, \eta) = \angle(\gamma_f, \eta_f)$$

para todo par de caminhos γ e η em G diferençáveis em 0 com $\gamma(0) = \eta(0)$ e $\gamma'(0), \eta'(0) \neq 0$.

A função f é *conformal* (respectivamente *anticonformal*) em a se preserva ângulos e $\det \mathrm{D}_a f > 0$ (respectivamente $\det \mathrm{D}_a f < 0$).

Funções Diferenciáveis Complexas. Vejamos que a conformalidade é outra forma para exprimir a diferenciabilidade de um função no plano real como função complexa sobre a reta:

Teorema 3.26. *Seja f uma função diferenciável f em um ponto a no plano real $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. A função f é conformal em a se, e tão-somente se, f é diferenciável em a como função na reta complexa $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Se f é diferenciável em a em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, então, para dois caminhos γ e η com $\gamma(0) = a = \eta(0)$ e $\gamma'(0), \eta'(0) \neq 0$, então

$$\angle(\gamma_f, \eta_f) = \frac{\langle \gamma_f'(0), \eta_f'(0) \rangle}{\|\gamma_f'(0)\| \|\eta_f'(0)\|} = \frac{\langle f'(a)\gamma'(0), f'(a)\eta'(0) \rangle}{\|f'(a)\gamma'(0)\| \|f'(a)\eta'(0)\|}$$

e

$$\frac{\langle \gamma'(0), \eta'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\| \|\eta'(0)\|} = \angle(\gamma, \eta).$$

Logo, $\angle(\gamma_f, \eta_f) = \angle(\gamma, \eta)$, isto é, f preserva ângulos, se, e tão-somente se, $f'(a)$ preserva ângulos. Em particular, f é conformal, se, e tão-somente se, $f'(a)$ é conformal.

Por Teorema 3.22, uma aplicação linear para $\mathbb{R}$ sobre plano real $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é conformal se, e tão-somente se, é linear sobre $\mathbb{C}$. Pela Definição 3.3 da diferenciabilidade (segundo Fréchet) sobre um corpo $\mathbf{K}$, uma função diferenciável f no plano real $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ em um ponto a é diferenciável como função sobre a reta complexa $\mathbb{C}$ se, e tão-somente se, o seu diferencial $\mathrm{D}_a f$, a priori apenas linear sobre $\mathbb{R}$, é linear sobre $\mathbb{C}$.

Logo, f é conformal em a se, e tão-somente se, é diferenciável como função sobre a reta complexa. □

Figura 3.5: A projeção de (Gerhardus) Mercator (1512 – 1594) é conformal. Preserva as formas dos continentes, mas distorce as suas dimensões: quanto mais distante do equador, maior a área projetada. Enquanto as distâncias entre os meridianos, as paralelas longitudinais, são todas iguais, as entre as paralelas latitudinais aumentam com a distância ao equador.

3.5. Transformações de Möbius

As transformações de Möbius sobre o plano $\mathbb{C}_\infty$ consistem em composições das quatro transformações de Möbius elementares:

- rotação $z \mapsto e^{i\theta}z$ para $\theta \in [-\pi, \pi[$,
- expansão ou escalamento $z \mapsto rz$ para $r \in \mathbb{R}$,
- traslação $z \mapsto z + b$ para $b \in \mathbb{C}$, e

- inversão (= substituir pelo seu recíproco) o módulo de cada ponto e reflexão através de qualquer eixo, $z \mapsto \frac{1}{z}$.

A composição de uma rotação e um escalamento constitui todas as aplicações conformais lineares; então (a situação local) o diferencial total de toda aplicação conformal é de uma tal forma. Porém, uma aplicação não-linear conformal pode ser de outra forma: o exemplo mais simples é o de uma traslação cujo diferencial total é a identidade, em particular, é conformal.

Definição 3.27. Para a, b, c e d em $\mathbb{C}$, uma aplicação da forma

$$\mathrm{S}\colon z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

sobre $\mathbb{C}_\infty$ é uma *transformação fracionária linear.* Se $ad - bc \neq 0$, então $\mathrm{S}(z)$ é chamada de *Transformação de Möbius.*

As transformações são visualizadas da melhor maneira pelas suas operações na esfera $\mathbb{C}_\infty$; vide o vídeo para ganhar um intuito.

Se

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{A}$ para λ em $\mathbb{C}^*$ induz a mesma transformação fracionária sobre $\mathbb{C}_\infty$. Logo, podemos supor que $ad - bc = 1$.

Operação do Grupo Linear na Linha Projetiva Complexa. Observa que temos uma operação bem-definida de

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\sim$$

sobre $\mathbb{C}$ onde $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ se existe λ em $\mathbb{C}^*$ com $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{A}$. De fato, a operação de Möbius provém da sobrejeção

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \ni (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{C}_\infty$$

e injeção

$$\mathbb{C}_\infty \ni \frac{x}{y} \mapsto \left(\frac{x}{y}, 1\right) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

que se tornam bijeções por substituir $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ por $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \coloneqq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\sim$ onde $(x', y') \sim (x, y)$ se existe λ em $\mathbb{C}$ com $x' = \lambda x$ e $y' = \lambda y$.

Proposição 3.28. *As transformações de Möbius formam um grupo; em particular, toda transformação é invertível.*

Demonstração: A transformação dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tem inverso

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

Proposição 3.29. *Toda transformação de Möbius é composta de transformações elementares*

- *expansão $a\cdot$,*
- *traslação $\cdot + a$, e*
- *inversão $\frac{1}{\cdot}$ (= substituir pelo seu recíproco) o módulo de cada ponto e reflexão através de qualquer eixo.*

Observação. Em dimensão > 2, todas as aplicações conformais são transformações de Möbius pelo Teorema de Liouville na Geometria Conformal onde uma transformação de Möbius para dimensões $n > 2$ se define pela ação induzida de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sobre

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{ \text{ todas as retas em } \mathbb{R}^{n+1}\} = \mathbb{R}^{n+1}/\sim$$

onde $v \sim w$ se existe λ em $\mathbb{R}$ com $w = \lambda v$. Como toda transformação linear A sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ transforma retas em retas, induza uma transformação bem-definida sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

4. Funções Analíticas

Seja $\mathbf{K}$ um corpo. Um *valor absoluto* em $\mathbf{K}$ é uma aplicação $|\cdot|\colon \mathbf{K} \to [0,\infty[$ com valores reais não-negativos tal que

- (Hausdorff) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,
- (Multiplicatividade) $|xy| = |x||y|$, e
- (Desigualdade Triangular) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Todo tal valor absoluto $|\cdot|$ induz uma métrica d por $\mathrm{d}(x,y) := |x-y|$.

Definição 4.1. Uma *série* $\sum_n a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ com a_0, a_1, ... em $\mathbf{K}$ *converge* se a sequência (s_n) dos seus truncamentos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ converge (em $\mathbf{K}$). Ela *converge absolutamente* se $\sum_n |a_n|$ converge (em $[0,\infty[$).

Proposição 4.2. *Seja $\sum_n a_n$ uma série. Se ela converge absolutamente e $\mathbf{K}$ é completo, então converge.*

Demonstração: Como $\mathbf{K}$ é completo, dada uma série $\sum_n u_n$, observemos q a sequência (s_n) dos seus truncamentos finitos $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ converge se, e tão-somente se, $s_{n,\ldots,m} = u_n + \cdots + u_m \to 0$ para $n \to \infty$; isto é, (s_n) converge se, e tão-somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $|s_{n,\ldots,m}| < \epsilon$ para todo $n, m \geq \mathrm{N}$.

Pela desigualdade triangular, $|a_n + \cdots + a_m| \leq |a_n| + \cdots + |a_m|$. Logo, se $|a_n| + \cdots + |a_m| \to 0$, então $|a_n + \cdots + a_m| \to 0$. Logo, pela observação, a sequência dos truncamentos finitos $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ converge; isto é, $\sum_n a_n$ converge. □

Para (a_n) uma sequência em $\mathbf{K}$, denote

$$\liminf a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \limsup a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

ou, alternativamente,

$$\underline{\lim}\, a_n := \liminf a_n \quad \text{e} \quad \overline{\lim}\, a_n := \limsup a_n.$$

Os limites são monotonamente crescentes respectivamente decrescentes; por isso sempre existem (se incluímos a possibilidade dos limites $\pm\infty$).

Uma *série de potências à volta de a* em $\mathbf{K}$ é uma *série de potências formal* da forma

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (Z - a)^n;$$

isto é, uma sequência de polinómios $(s_N(Z) : N \in \mathbb{N})$ com $s_N(Z) = \sum_{n=0,\ldots,N} a_n (Z - a)^n$ em $\mathbf{K}[Z]$.

Se substituirmos a incógnita Z por um elemento z em $\mathbf{K}$, obtemos a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - a)^n$ em $\mathbf{K}$, isto é, a sequência de somas truncadas (s_N) com $s_N = \sum_{n=0,\ldots,N} a_n (z - a)^n$ em $\mathbf{K}$.

Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - a)^n < \infty$, isto é, se a sequência (s_N) converge, para todo z em um subconjunto X em K, então obtemos uma função

$$\begin{aligned} D &\mapsto \mathbf{K} \\ z &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - a)^n. \end{aligned}$$

Para distinguir entre estas três interpretações de uma série de potências, usaremos (que o leitor atento nos corrija em cada caso contrário!)

- uma letra *maiúscula* como Z para destacar que se trata de uma *série de potências formal*,
- uma letra *minúscula* como z para destacar que se trata de uma *série* em $\mathbf{K}$, e
- a notação $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (\cdot - a)^n$ ou $z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - a)^n$ para destacar que se trata de uma *função* sobre um subconjunto de $\mathbf{K}$.

Em [Con95, III], não há distinção entre estas três interpretações por notação ou nomeação e a interpretação intendida revela-se pelo contexto.

4.1. Raio de convergência

Toda série de potências $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (Z - a)^n$ é uma função (com valores em $\mathbf{K}$) definida sobre uma bola aberta em $\mathbf{K}$ à roda de a cujo raio calculemos agora:

Por exemplo, a *série geométrica* é a série de potências (em torno de 0)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} Z^n.$$

Pela *soma telescópica*,

$$(1-Z)(1+Z+\cdots+Z^n) = 1-Z^{n+1}$$

Logo, se $|z| < 1$, então

$$\sum_n z^n = \frac{1}{1-z},$$

e se $|z| > 1$, então $\sum_n z^n$ diverge.

Teorema 4.3. *Para uma série de potências* $\sum_n a_n(Z-a)^n$ *define o seu* raio de convergência R *por*

$$\frac{1}{R} := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \qquad \textit{em } [0,\infty].$$

(i) *Se* $|z-a| < R$, *então a série* $\sum_n a_n(z-a)^n$ *converge absolutamente.*

(ii) *Se* $|z-a| > R$, *então a série* $\sum_n a_n(z-a)^n$ *diverge.*

(iii) *Se* $r < R$, *então a série de funções* $\sum_n u_n$ *com* $u_n := a_n(\cdot - a)^n$ *definidas sobre a bola* $\{z : |z-a| \leq r\}$ *converge uniformemente.*

O raio de convergência R *é o único número que satisfaz as propriedades (i) e (ii).*

Demonstração: Pelos traslados mutuamente inversos $z \mapsto z-a$ e $z \mapsto z+a$, podemos supor $a = 0$.

(i) Temos

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R} \qquad \text{em } [0,\infty].$$

se, e tão-somente se, existe N tal que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R}$ para todo $n \geq N$. Equivalentemente, $|a_n| \leq \frac{1}{R^n}$ para todo $n \geq N$. Logo, para $|z| = r < R$ e $n \geq N$,

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Como $\rho := \frac{r}{R} < 1$, a série $\sum_{n\geq N} |a_n z^n|$ é dominada pela série geométrica convergente em ρ; logo

- a série $\sum_n a_n z^n$ converge absolutamente sobre a bola $\{z : |z| \leq r\}$, e
- a série de funções $\sum_n a_n \cdot^n$ sobre $\{z : |z| \leq r\}$ converge uniformemente pelo Teste de Weierstrass Teorema 2.92.

Se $|z| > R$, então existe $r > R$ com $|z| \geq r$. Temos

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{R} \quad \text{em } [0, \infty].$$

se, e tão-somente se, existem n_0, n_1, ... em $\mathbb{N}$ tal que $|a_{n_0}|^{\frac{1}{n_0}}$, $|a_{n_1}|^{\frac{1}{n_1}} \ldots \geq \frac{1}{R}$. Logo a série $\sum_n a_n z^n$ tem uma infinitude de parcelas com índices $n = n_0$, n_1, ... com

$$|a_n z^n| \geq \rho^n \quad \text{com } \rho := \frac{r}{R} > 1.$$

Como $\rho^n \to \infty$, estas parcelas são ilimitadas; logo $\sum_n a_n z^n$ não converge (porque se convergisse, então as parcelas convergiriam a 0).

Quanto à unicidade do número positivo que satisfaz (i) e (ii): Sejam R e S dois tais números. Após uma eventual troca dos seus nomes $R \leq S$. Por (ii) para R, obtemos que R é o maior número positivo T tal que (i) é satisfeito para todo z em $\mathbf{K}$ com $|z| < T$. Logo, como (i) é satisfeito para S, obtemos $S \leq R$. □

Em outras palavras, por Teorema 4.3, para toda série de potências $\sum_n a_n (Z - a)^n$ existe um único número R em $[0, \infty]$, determinado por

$$\frac{1}{R} := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

tal que, para todo z em $\mathbf{K}$ com $|z| \neq R$, a série $\sum_n a_n (z - a)^n$ converge se, e tão-somente se, $|z| < R$.

Proposição 4.4. *Seja $\sum_n a_n (Z - a)^n$ uma série de potências cujo* raio de convergência R *é definido por*

$$\frac{1}{R} := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad \text{em } [0, \infty].$$

Se a sequência

$$\left(\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| : n \in \mathbb{N} \right)$$

converge, então

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \to R.$$

Demonstração: Pelos traslados mutuamente inversos $z \mapsto z - a$ e $z \mapsto z + a$, podemos supor $a = 0$.

Exista $\alpha = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$. Se $r < \alpha$, então existe N tal que para todo $n \geq N$ temos $r < |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$; equivalentemente, $\frac{1}{r} > |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

Se $|z| = s < r$, então estimemos, para $n \geq N$, usando o *produto telescópico*

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N}\right| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}$$

que

$$|a_n z^n| = |a_n||z^n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}|a_N||z|^n < |a_N|\xi^n$$

com $\rho := \frac{s}{r} < 1$. Logo, como $s < r < \alpha$ foram arbitrários, $\sum_n a_n z^n$ é dominada pela série geométrica convergente em ρ; logo converge para todo z com $|z| < \alpha$; isto é, $R \geq \alpha$.

Se $r > \alpha$, então existe N tal que para todo $n \geq N$ temos $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| < r$; equivalentemente, $\frac{1}{r} < |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Se $|z| = s > r$, então estimemos, para $n \geq N$, usando o *produto telescópico*

$$|a_n z^n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}|a_N||z|^n > |a_N|\rho^n$$

com $\rho := \frac{s}{r} > 1$. Logo a série $\sum_n a_n z^n$ tem uma infinitude de parcelas com

$$|a_n z^n| \geq \rho^n$$

Como $\rho^n \to \infty$, estas parcelas são ilimitadas; logo $\sum_n a_n z^n$ não converge (porque se convergisse, então as parcelas convergiriam a 0). Isto é, $R \leq \alpha$. □

Observação. Cautela, nada se diz sobre a convergência ou divergência no círculo $|z| = R$. Neste caso depende

- da série específica, e
- da topologia do corpo

se ela converge ou não! Por exemplo,

- se $a_n = 1$, então $\sum_n a_n Z^n$ tem raio de convergência $R = 1$ e diverge no círculo $|z| = 1$;
- se $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, então $\sum_n a_n Z^n$ tem raio de convergência $R = 1$ e sobre o círculo $|z| = 1$
  - diverge para $z = -1$, e
  - converge para $z = 1$ a $\log(1 + z)$.

O raio de convergência depende dos valores absolutos $|a_n|$ dos coeficientes da série de potências $\sum_n a_n(\mathrm{Z}-a)^n$:

Observação 4.5. Seja o *corpo primitivo* de $\mathbf{K}$ o menor corpo de $\mathbf{K}$. Se a característica de $\mathbf{K}$ é 0, então é $\mathbb{Q}$, e, caso contrário, então é $\mathbb{F}_p$ para um número p primo.

Pelo Teorema de Ostrowski, Teorema F.3, se a característica é 0, então sobre o seu corpo primitivo:

- Ou $|\cdot|$ é o valor trivial,
- ou $|\cdot|$ é equivalente a um valor absoluto $|\cdot|_p$ para p primo, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que $|\cdot| = |\cdot|_p^\alpha$,
- ou $|\cdot|$ é equivalente ao valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que $|\cdot| = |\cdot|_\infty^\alpha$.

Se a característica é $p > 0$, então, pela multiplicatividade de $|\cdot|$, por $\mathbb{F}_p$ ser finito, $|\cdot|$ é equivalente ao valor absoluto trivial.

Exemplo 4.6. Logo, se a característica de $\mathbf{K}$ é 0, então, por exemplo, $\frac{1}{n!} \to 0$ em $\mathbb{R}$, mas cresce monotonamente em $\mathbb{Q}_p$ para todo p primo:

Em $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, por Proposição 4.4, a série de potências

$$\exp \mathrm{Z} \coloneqq \sum_n \frac{\mathrm{Z}^n}{n!}$$

(também denotada por e^{Z}) converge para todo z em $\mathbf{K}$.

Ao contrário, em um corpo $\mathbf{K}$ que contém (como subcorpo normado) $\mathbb{Q}_p$ o raio de convergência de $\exp \mathrm{Z}$ é $\mathrm{R} = p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Sobre um corpo de característica positiva, $\exp \mathrm{Z}$ não é definida.

Proposição 4.7. *Sejam $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ duas séries. Se convergem absolutamente, então a série*

$$\sum_n c_n \qquad \text{com } c_n \coloneqq a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$$

converge absolutamente com limite $\sum_n a_n \sum_n b_n$.

Demonstração: Exercício. □

Corolário 4.8. *Sejam $\sum_n a_n(\mathrm{Z}-a)^n$ e $\sum_n b_n(\mathrm{Z}-a)^n$ duas séries de potências. Se têm raios de convergência $\geq r > 0$, então*

$$\sum_n c_n(\mathrm{Z}-a)^n \qquad \text{com } c_n \coloneqq a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$$

e

$$\sum_n d_n(\mathrm{Z} - a)^n \qquad com\ c_n = a_n + b_n$$

tem raio de convergência $\geq r$ *com*

$$\sum_n c_n(z-a)^n = \sum_n a_n(z-a)^n \sum_n b_n(z-a)^n$$

e

$$\sum_n d_n(z-a)^n = \sum_n a_n(z-a)^n + \sum_n b_n(z-a)^n$$

para todo $z \in \mathbf{K}$ *com* $|z-a| < r$.

Na prática, Corolário 4.8 permite-nos adicionar e multiplicar valores de séries de potências sobre o seu domínio de convergência, graças a sua convergência absoluta, como se fossem somas finitas.

Exercício 4.9.

(i) Calcule o raio de convergência da série $\sum_{n=0,1,\ldots} a^{n^2} z^n$ em $\mathbb{K}$ para os diferentes valores absolutos de $a \in \mathbb{K}$!

Dica: Pela Proposição 4.4,

$$\mathrm{R} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{a^{n^2}}{a^{n^2+2n+1}}\right| = \left|\frac{1}{a^{2n+1}}\right|.$$

Logo,

- Se $a \neq 0$ e $|a| > 1$, então $a^{2n+1} \to \infty$; logo o raio de convergência é $\mathrm{R} = 0$.
- Se $|a| < 1$, $a^{2n+1} \to 0$, então o raio de convergência é $\mathrm{R} = \infty$.
- Se $|a| = 1$, então $\mathrm{R} = 1$.

(ii) Calcule o raio de convergência de $\sum_{n=0,1,\ldots} z^{n!}$ em $\mathbf{K}$!

Dica: Escrevamos

$$\sum_{n=0,1,\ldots} z^{n!} = \sum_{k=0,1,\ldots} a_k z^k,$$

onde $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_k = 1$ para $k = n!$, e $a_k = 0$ para os demais valores de k. Assim, $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1$. Portanto, $\mathrm{R} = 1$.

(iii) Mostre que o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1,2,\ldots} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

em $\mathbb{C}$ é 1! Verifique sua convergência para $z = \pm 1$ e $\pm i$!

4.2. Derivadas de Séries de Potências

Calculemos explicitamente as derivadas de uma série de potência. Não há surpresas: a derivada é dada pelas derivadas (formais) dos polinómios truncados.

Lema 4.10. *Temos* $\lim \sqrt[n]{|n|} = 1$.

Demonstração: Por Observação 4.5, sobre o seu corpo primitivo:

(i) Ou $|\cdot|$ é equivalente ao valor trivial,

(ii) ou $|\cdot|$ é equivalente ao valor absoluto usual,

(iii) ou $|\cdot|$ é equivalente a um valor absoluto $|\cdot|_p$ para p primo.

Ad (i): Se $|\cdot|$ é trivial, então $|n| = 1$ para todo n em $\mathbb{N}$ que não é múltiplo da característica p de $\mathbf{K}$ (= o número primo p que gera o núcleo de $\mathbb{Z} \to \mathbf{K}$). Logo, pela multiplicatividade de $|\cdot|$, vale $|\sqrt[n]{n}| = 1$ para todo n indivisível por p. Em particular, $\limsup \sqrt[n]{n} = 1$.

Ad (ii): Escreve $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ para $\delta_n > 0$. Temos, pelo desenvolvimento binomial,

$$n = (1+\delta_n)^n = \sum_{k=0,\ldots,n} \binom{n}{k} \delta_n^k > \binom{n}{2} \delta_n^2$$

se, e somente se,

$$\delta_n^2 < \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{para } n \to \infty.$$

Ad (iii): Se $|\cdot|$ é equivalente à $|\cdot|_p$, então $\frac{1}{n} \leq |n| \leq 1$ para todo n em $\mathbb{N}$. Logo, por (ii),

$$1 = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \lim \sqrt[n]{|n|} \leq 1.$$

Lema 4.11. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências reais. Se* $a_n, b_n \geq 0$ *para todo* n *e* $\lim a_n = a$ *e* $b = \limsup b_n$ *existem e* $a > 0$, *então*

$$\limsup a_n b_n = ab.$$

Demonstração: A estimativa $\leq$ é clara.

Quanto à estimativa $\geq$, se $b = 0$, então $b = \lim b_n$, logo $\limsup a_n b_n = \lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n = ab$.

Se $b > 0$, sejam $\alpha < a$, $\beta < b$ positivos e N em $\mathbb{N}$. Temos de encontrar $n \geq N$ tal que $a_n b_n > \alpha\beta$: Como $a_n \to a$, existe $N' \geq N$ tal que $a_n > \alpha$ para todo $n \geq N'$. Como $\sup\{b_m : m \geq n\} \to b$, existe $N'' \geq N$ tal que $\sup\{b_m : m \geq n\} > \beta$ para todo $n \geq N''$. Logo, $a_n b_n > \alpha\beta$ para todo $n \geq N', N''$. □

Corolário 4.12. *Seja (a_n) uma sequência real. Se $a_n \geq 0$ para todo n e $a = \limsup a_n$ existe, então*

$$\limsup a_n a_n^{\frac{1}{n}} = a.$$

Demonstração: Ou $a = 0$, quando $\limsup a_n = \lim a_n$ e $0 \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq 1$ para todo n; logo Lema 4.11 se aplica às sequências (a_n) e $(a_n^{\frac{1}{n}})$.

Ou $a > 0$, quando $a_n^{\frac{1}{n}} \to 1$; logo Lema 4.11 se aplica às sequências $(a_n^{\frac{1}{n}})$ e (a_n). □

Proposição 4.13. *Seja $f(Z) = \sum_n a_n (Z - a)^n$ uma série de potências. Se $f(Z)$ tem raio de convergência $R > 0$, então*

(i) *para todo $k \geq 1$, a série de potências*

$$\sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (Z-a)^{n-k}$$

tem raio de convergência R,

(ii) *a função $z \mapsto f(z)$ sobre $B(a, R)$ é infinitamente derivável e a sua k-ésima derivada $f^{(k)}$ é dada por*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z-a)^{n-k},$$

(iii) *para todo $n \geq 0$,*

$$n! a_n = f^{(n)}(a)$$

Demonstração: Ad (i): Mostremos primeiro a conclusão para $k = 1$: Calculemos o raio de convergência R da série de potências $\sum_{n \geq 1} n a_n (Z - a)^{n-1}$ por

$$\frac{1}{R} = \limsup |n a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

onde se aplicaram, na segunda igualdade,

- Lema 4.10 para $\lim \sqrt[n]{|n|} = 1$, e
- Lema 4.11 às sequências $(n^{\frac{1}{n}})$ e $(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}})$;

na última igualdade,

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{1+\frac{1}{n-1}} = \limsup b_n b_n^{\frac{1}{n-1}}$$

com $b_n = |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Por Corolário 4.12, aplicado à sequência (b_n),

$$\limsup b_n b_n^{\frac{1}{n-1}} = \limsup \mathrm{b}_n = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Isto é, o raio de convergência de $\sum_{n \geq 1} n a_n (\mathrm{Z} - a)^{n-1}$ é igual ao de $f(\mathrm{Z})$.

Para $k \geq 1$, pela hipótese de indução,

$$\sum_{n \geq 0} a_n^{(k)} (\mathrm{Z} - a)^n = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (\mathrm{Z} - a)^{n-k},$$

onde $a_n^{(k)} := (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k}$, tem raio de convergência R. Logo, pelo caso $k = 1$,

$$\sum_{n \geq k+1} n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k) a_n (\mathrm{Z} - a)^{n-(k+1)},$$

tem raio de convergência R.

Ad (ii): Pelos traslados mutuamente inversos $z \mapsto z - a$ e $z \mapsto z + a$, podemos supor $a = 0$. Ponhamos $g(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$. Como todas as séries são absolutamente convergentes, logo os seus limites independentes da ordem do somatório,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \\
=&\frac{\sum_n a_n z^n - \sum_n a_n w^n}{z - w} - \sum_{n \geq 1} n a_n w^{n-1} \\
=&\left[\frac{s_\mathrm{N}(z) - s_\mathrm{N}(w)}{z - w} - s_\mathrm{N}'(w)\right] + \frac{\mathrm{R}_\mathrm{N}(z) - \mathrm{R}_\mathrm{N}(z)}{z - w} + \left[s_\mathrm{N}'(w) - g(w)\right]
\end{aligned}$$

com

$$s_\mathrm{N}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_\mathrm{N} z^\mathrm{N} \quad \text{e} \quad \mathrm{R}_\mathrm{N}(z) = a_{\mathrm{N}+1} z^{\mathrm{N}+1} + a_{\mathrm{N}+2} z^{\mathrm{N}+2} + \cdots .$$

Precisamos de mostrar que esta soma converge a 0 quando w converge a z:

Como o polinomial $s_N(z)$ é diferenciável, a primeira diferença posta em colchetes converge a 0.

Como a série de potências $g(w)$ converge por (i), a última diferença posta em colchetes converge a 0.

Quanto à fração no meio, pela convergência absoluta,

$$\frac{R_N(z) - R_N(z)}{z - w} = a_{N+1}\frac{z^{N+1} - w^{N+1}}{z - w} + a_{N+2}\frac{z^{N+2} - w^{N+2}}{z - w} + \cdots .$$

Pela soma telescópica

$$(z - w)(z^n + z^{n-1}w + \cdots + zw^{n-1} + w^n) = (z^{n+1} - w^{n+1}),$$

obtemos

$$\frac{R_N(z) - R_N(z)}{z - w} = \sum_{n>N} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1})$$

Como $|z|$ e $|w| < r < R$, obtemos

$$|a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1})| \leq |a_n| n |r|^{n-1};$$

logo, a série com as parcelas $a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1})$ converge absolutamente por (i) (sobre $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Em particular,

$$\frac{R_N(z) - R_N(z)}{z - w} \to 0 \quad \text{para } N \to \infty.$$

Por indução sobre k, aplicando esta igualdade à série com os coeficientes $a_n^{(k)} = (n+k)(n+k-1)\cdots n a_{n+k}$, obtemos que f é k vezes diferenciável com a sua k-ésima derivada

$$f^{(k)} = \sum_n n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(Z-a)^{n-k}.$$

Ad (iii): Por avaliação da série de potências que descreve $f^{(k)}$ obtida em (ii) no ponto a. □

Observação. Se $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ exista, então Proposição 4.13.(i) segue diretamente de Proposição 4.4 pois

$$\frac{|na_n|}{(n+1)|a_{n+1}|} = \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\frac{n}{n+1} \to \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Corolário 4.14. *Seja* $f(Z) = \sum_n a_n(Z-a)^n$ *uma série de potências. Se* $f(Z)$ *tem raio de convergência* $R > 0$*, então a função* $z \mapsto \sum_n a_n(z-a)^n$ *é bem-definida e suave em* $B(a, R)$.

Corolário 4.15. *Para todo* z *em* $\mathbf{K}$ *com* $|z| < 1$

$$\sum_n nz^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Demonstração: Por Proposição 4.13 aplicado à série geométrica e usando a igualdade $\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$. □

4.3. Exponencial

A série de potências

$$\exp Z = \sum_n \frac{Z^n}{n!},$$

converge em todos os pontos em $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ e por Proposição 4.13 possui derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \exp z = \sum_{n \geq 1} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \exp z.$$

Observação 4.16. Em particular, como $\exp(r) > 0$ para todo r em $\mathbb{R}$, a derivada de $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ é positiva; logo, cresce estritamente; em particular, é injetor sobre $\mathbb{R}$.

Denote

$$e := \exp(1).$$

Exercício. Mostra $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$!

Lema 4.17. *Seja* B *uma bola em volta de* 0 *em* $\mathbf{K}$ *e* $f\colon B \to \mathbf{K}$. *Se* f *é diferenciável e* $f'(x) = f(x)$*, então* $f(a+b) = f(a)f(b)$.

Demonstração: Sejam z_0 e $z_0 - z$ em B e define a função $g\colon B \to \mathbf{K}$ por $z \mapsto f(z)f(z_0 - z)$. Logo, pela regra do produto

$$(uv)' = u'v + uv',$$

para as funções diferenciáveis $u = f$, $v = f(z_0 - \cdot)$ obtemos pela nossa hipótese $g'(z) = 0$. Por Proposição 3.9, $g(z) = \omega$ é constante, $\omega = g(0) = f(0)f(z_0)$. Isto é, $f(z)f(z_0 - z) = f(0)f(z_0)$. Escrevendo $z = a$ e $z_0 = a + b$, obtemos

$$f(a)f(b) = f(0)f(a+b) \tag{$*$}$$

para todo a e b em $\mathbf{K}$.

Como $f(a) = f(0+a) = f(0)f(a)$ para todo a em $\mathbf{K}$, ou $f = 0$, ou $f(0) = 1$. Logo, vale $(*)$ para $f(0)$ substituído por 1. $\square$

Lema 4.17 aplica-se em particular a $f = \exp$.

Definição. Denote a função sobre $\mathbf{K}$ dada pela série de potências convergente $\exp(Z)$ por

$$e^{\cdot} \coloneqq \exp;$$

isto é, $e^z = \exp(z)$ para todo z em $\mathbf{K}$.

Esta notação já sugere que o argumento de exp se comporta como o expoente da potenciação com base e:

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad \text{e} \quad e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Em particular, $e^{an} = (e^a)^n$ para todo n em $\mathbb{N}$.

Observação. Sobre $\mathbb{C}$, como todos os coeficientes de $\exp \mathrm{Z}$ são reais, $\overline{\exp \mathrm{Z}} = \exp \overline{\mathrm{Z}}$. Em particular, se θ em $\mathbb{R}$, então $|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$, isto é, $|e^{i\theta}| = 1$. Mais geralmente

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = \exp(2\Re z),$$

isto é, $|\exp z| = \exp(\Re z)$. Logo, para z com $\Im z = \theta$,

$$\exp z = |\exp z| \exp(i\theta).$$

Exercício. Mostra que exp é a única função $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ que é diferenciável e satisfaz $f(a+b) = f(a)f(b)$ e $f(1) = e$!

Exercício. Mostra que o logaritmo $\log\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definido por

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

satisfaz $f(ab) = f(a)+f(b)$ por uma adaptação da demonstração de Lema 4.17!

Mostra que log é a única função $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ que é diferenciável e satisfaz $f(ab) = f(a) + f(b)$ e $f(e) = 1$!

Deduze que log é inverso à exponencial.

Dica. Deriva $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$; compara com $\sum(-x)^n = \frac{1}{1+x}$; deduze $\log(x) = \frac{1}{x}$.

Deriva $\log(ax) - \log(x)$; avalia $\log(1) = 0$; deduze $\log(ax) = \log(a) + \log(x)$.

Mostra $\log(e) = \log(\lim_n (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}) = 1$.

Logo log é diferenciável e satisfaz $f(ab) = f(a) + f(b)$ e $f(e) = 1$.

Se f é uma tal função, então é determinada sobre $e \cdot \mathbb{N}$ e $e \cdot \mathbb{Q}_{>0}$, pois

$$f(e^n) = f(e)n = n \quad \text{e} \quad f(e^{\frac{1}{n}}) = -f(e^n) = -n.$$

Logo $f \circ \exp = \mathrm{id}$ sobre $\mathbb{Q}$, logo sobre $\mathbb{R}$ por continuidade. Como exp é bijetora, necessariamente $\exp \circ f = \mathrm{id}$. Isto é, f é inverso à exp.

Aplicado a $f = \log$, obtemos que log é inverso à exp.

Funções Trigonométricas. Definamos as funções trigonométricas *co-seno* e *seno* sobre $\mathbb{R}$

$$\cos Z := \Re(\exp(iZ)) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad \text{e} \quad \sin Z := \Im(\exp(iZ)) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

que convergem absolutamente em todos os pontos em $\mathbb{R}$ (e $\mathbb{C}$).

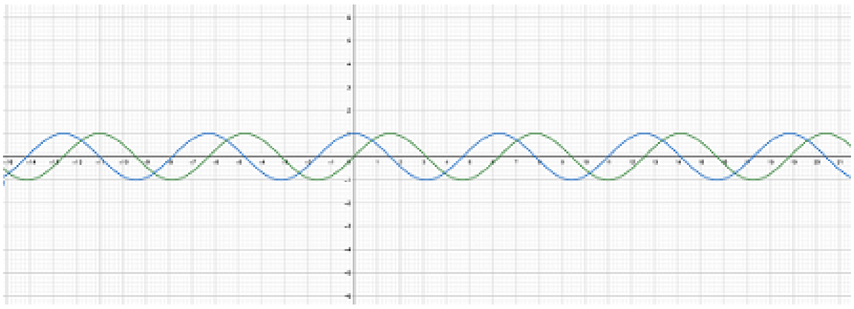

Figura 4.1: As funções suaves seno (cujo gráfico é verde) e o co-seno (cujo gráfico é azul) sobre $\mathbb{R}$.

Por Proposição 4.13, derivando cada termo da série,

$$\cos' = -\sin \quad \text{e} \quad \sin' = \cos.$$

Como $|\exp(i\cdot)|^2 = 1$, por definição

$$\cos^2 + \sin^2 = 1. \tag{4.1}$$

Logo, a imagem de cos e de sin é contida em $[-1,1]$ e $\cos = \pm 1$ se, e tão-somente se, $\sin = 0$; igual para cos e sin trocadas.

Lema 4.18. *A função* $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ *tem um único zero em* $[0,2]$.

Demonstração: Temos $\cos(0) = 1$ e

$$\begin{aligned}\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \cdots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \leq -1/3.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um zero entre 0 e 2.

Para mostrar que este é o único zero no intervalo $[0,2]$, mostremos que cos é estritamente monótona ali; ou, suficientemente, que $\cos' > 0$ em $]0,2[$. Como $\cos' = -\sin$, mostremos equivalentemente que $\sin > 0$ em $]0,2[$:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots \\ &\geq x\left(1 - \frac{4}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{4}{6\cdot 7}\right) + \cdots \geq x/3 > 0.\end{aligned}$$

□

Definição 4.19. Denote $\pi = 2s$ onde s é o único zero de $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ no intervalo $[0,2]$ (segundo Lema 4.18).

Observação. Como π é a proporção entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, seria mais evidente definir $s = \frac{\pi}{2}$ pelo comprimento do gráfico de $\gamma = (\cos, \sin)$ sobre $[0,1]$, isto é,

$$s \coloneqq \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}f.$$

Contudo, notemos que esta definição necessita o desenvolvimento

- da teoria da diferenciação, e
- da teoria da integração

sobre a reta $\mathbb{R}$. Logo, a como zero de cos em $[0,2]$ é mais elementar.

Por outro lado, poderíamos ter definido π diretamente por uma série convergente como estabelecido por Leonhard Euler em 1741 pela demonstração do Problema de Basileia

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_n \frac{1}{n^2}.$$

(Vide [San18] para uma bela explicação geométrica desta igualdade!) Contudo, esta definição não evidenciaria o papel distinto de π como argumento da função $\exp(i\cdot)$ em (4.2).

Por (4.1), temos $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. A demonstração de Lema 4.18 mostrou, em particular, que $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Logo, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Isto é, $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$, e pela multiplicatividade de exp,

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i, \exp\left(i\pi\right) = -1, \exp\left(i\frac{3}{2}\pi\right) = -i, \text{ e } \exp\left(i2\pi\right) = 1. \tag{4.2}$$

Corolário 4.20. *A função* $\cos[0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ *é bijetora.*

Demonstração: A demonstração de Lema 4.18 mostrou, em particular, que cos decresce estritamente em $[0,\frac{\pi}{2}]$; em particular, é injetor.

Como a função é contínua, e tem os valores 0 e 1 em $[0,\frac{\pi}{2}]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, $[0,1]$ é contido na sua imagem. □

Teorema 4.21 (Demonstração de [Niv47])**.** *O número π é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\pi = \frac{a}{b}$ para inteiros positivos a e b. Para qualquer n em $\mathbb{N}$, define $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

e $\mathrm{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathrm{F}(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^j f^{(2j)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Primeiro Escólio: $\mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(\pi)$ é um número inteiro.

Prova: Expandindo f como uma soma de monômios, o coeficiente de x^k é um número da forma $\frac{c_k}{n!}$ em que c_k é um número inteiro para todo k; mais precisamente, é 0 para todo $k < n$.

Portanto, $f^{(k)}(0) = (k!/n!)c_k$ para $n \leq k \leq 2n$ e é 0 para $k < n$; em ambos os casos $f^{(k)}(0)$ é um número inteiro; logo $\mathrm{F}(0)$ é um número inteiro.

Por outro lado, $f(\pi - x) = f(x)$ e, portanto, $(-1)^k f^{(k)}(\pi - x) = f^{(k)}(x)$ para todo $k \geq 0$. Em particular, $(-1)^k f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(0)$. Portanto, $f^{(k)}(\pi)$ também é um número inteiro. Logo, $F(\pi)$ é um inteiro.

Concluímos que $F(0) + F(\pi)$, como soma de inteiros, é inteira.

Segundo Escólio: $\int_0^\pi f(x) \sin(x)\, dx = F(0) + F(\pi)$

Prova: Como $f^{(2n+2)} = 0$, tem-se $F'' + F = f$. Como $\sin' = \cos$ e $\cos' = -\sin$, pela regra do produto $(F' \cdot \sin - F \cdot \cos)' = f \cdot \sin$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x)\, dx = \big(F'(x) \sin x - F(x) \cos x\big)\Big|_0^\pi.$$

Como $\sin 0 = \sin \pi = 0$ e $\cos \pi = 1$, concluímos o enuncio.

Conclusão: Como $f(x) > 0$ e $\sin x > 0$ para $0 < x < \pi$, obtemos por ambos os escólios que $F(0) + F(\pi)$ é um inteiro *positivo*. Como $0 \leq x(a - bx) \leq \pi a$ e $0 \leq \sin x < 1$ para $0 \leq x \leq \pi$, obtemos pela definição de f que

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x)\, dx \leq \pi \frac{(\pi a)^n}{n!} < 1 \quad \text{para } n \gg 0.$$

Pelo segundo escólio $F(0) + F(\pi) < 1$ para tal $n \gg 0$; contradição a soma $F(0) + F(\pi)$ ser positiva e inteira! □

Por um famoso resultado por Lindemann de 1882, o número π é até mesmo transcendente, isto é, $f(\pi) \neq 0$ para todo f não-nulo em $\mathbb{Q}[X]$. Enquanto a demonstração original foi envolvida, logo depois Hilbert deu em [Hil93] uma mais simples de quatro páginas.

Periodicidade de exp.

Estudemos os períodos da exponencial:

Definição 4.22. Uma função f sobre um subconjunto de $\mathbf{K}$ é *periódica* com *período* c em $\mathbf{K}$ se $f(\cdot + c) = f$.

Aplicando os resultados anteriores, concluímos:

Proposição 4.23. *Temos*

$$\{ \textit{ todos os períodos de } \exp \} = \{z \in \mathbb{C} : \exp z = 1\} = \{k \cdot 2\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração: Mostremos à inclusão "$\supseteq$": Por (4.2),

$$\exp(k \cdot 2\pi i) = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)^4\right)^k = (i^4)^k = 1^k = 1 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Mostremos à inclusão “$\subseteq$”: Se c é um período de exp, então $e^{z+c} = e^z e^c$. Como $\exp \neq 0$, obtemos $e^c = 1$. Em particular, $1 = |e^c| = e^{\Re z}$. Como $e^0 = 1$ e exp é injetor sobre $\mathbb{R}$ por Observação 4.16, logo $\Re z = 0$, isto é, c em $i\mathbb{R}$.

Se

$$\exp(i\theta) = 1 \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi[,$$

então, pela multiplicatividade da exponencial, $\exp(i\frac{\theta}{4})$ em $\{\pm 1, \pm i\}$. Pela unicidade do zero de cos, para $\eta \in [0, 2]$,

$$\exp(i\eta) = i$$

se, e tão-somente se, $\eta = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\frac{\theta}{4} \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Logo, como θ em $[0, 2\pi[$, necessariamente $\theta = 0$. Isto é, não há períodos em $i\mathbb{R}$ além dos da forma $k2\pi i$. $\square$

Denote $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o círculo unitário no plano complexo.

Corolário 4.24. *A função*

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi] &\to \mathbb{S}^1 \\ \theta &\mapsto e^{i\theta} \end{aligned}$$

é sobrejetora. A sua restrição $[-\pi, \pi[\to \mathbb{S}^1$ é bijetora.

Demonstração: Seja $z = a + ib$ em $\mathbb{S}^1$. Mostremos que $\exp(i\cdot) \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{S}^1$ é sobrejetor, isto é, existe θ em $[-\pi, \pi]$ tal que $\exp(i\theta) = z$. Distingamos os casos $a \lessgtr 0$ e $b \lessgtr 0$:

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, isto é, $a \in [0, 1]$, então pela bijetividade de cos existe θ em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\cos\theta = a$. Como $\cos^2 + \sin^2 = 1$ e $\sin \geq 0$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$, temos $\sin\theta = b$. Isto é, $\exp i\theta = z$.

Se $a < 0$ e $b \geq 0$, então $Z := -iz$ satisfaz as condições do caso precedente. Logo, existe Θ em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\exp i\Theta = Z$. Por (4.2), o argumento $\theta := \frac{1}{2}\pi + \Theta$ satisfaz

$$\exp i\theta = \exp(i\frac{\pi}{2}) \exp(i\Theta) = iZ = z.$$

Se $b < 0$, então pelos dois casos precedentes, existe Θ em $[0, \pi]$ tal que $\exp i\Theta = -z$. Por (4.2), o argumento $\theta := \Theta - \pi$ satisfaz

$$\exp i\theta = \exp(-i\pi) \exp(i\Theta) = (-1) - z = z.$$

Isto conclui a demonstração da sobrejetividade de $\exp(i\cdot)\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{S}^1$.

Observemos primeiro que $\exp(-i\pi) = \exp(i\pi) = 1$, logo $\exp(i\cdot)\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ é sobrejetor. Mostremos que $\exp(i\cdot)\colon]-\pi,\pi[$ é injetor. Como cos é injetor sobre $[0,\frac{\pi}{2}]$, em particular $\exp(i\cdot)$ é injetor. Logo, pela multiplicatividade de exp e por (4.2), as funções

$$\exp(i\cdot)\colon \left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\to [-1,0] \quad \text{e} \quad \exp(i\cdot)\colon \left[-\frac{\pi}{2},0\right[\to -i[-1,0],$$

e

$$\exp(i\cdot)\colon \left[0,-\frac{\pi}{2}\right[\to [0,1] \quad \text{e} \quad \exp(i\cdot)\colon \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\to i[0,1]$$

são injetoras. As suas imagens intersectam só em -1, o valor de $\exp(i\cdot)$ em $\pm\pi$. Logo, $\exp(i\cdot)$ é injetora em $[-\pi,\pi[$. □

O inverso de $\exp(i\cdot)\colon [-\pi,\pi[\to \mathbb{S}^1$ não é contínuo, mas, sim, a sua restrição $]-\pi,\pi[\to \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ como veremos em Lema 4.28.

4.4. Ramos do Logaritmo

Por Proposição 4.23, em particular a série de potências exp não é injetor sobre o seu domínio $\mathbb{C}$ (em contraste ao domínio $\mathbb{R}$). Logo, existe nenhuma função *inversa*, isto é, uma função f tal que $f \circ \exp = \mathrm{id}$ e $\exp \circ f = \mathrm{id}$. No entanto, existe uma função que satisfaz a segunda igualdade; uma tal função chama-se *cisão* (e *retração* se satisfaz a primeira igualdade). Intuitivamente, uma cisão recorta o domínio tal que contenha nenhum par de pontos que tenham o mesmo valor.

Definição 4.25. Seja G um subconjunto aberto em $\mathbb{C}$. Um *ramo do logaritmo* é uma função $f\colon G \to \mathbb{C}$ contínua que *cinde* exp, isto é, tal que

$$\mathrm{id} = \exp \circ f.$$

Se f é inverso à exp, logo

$$e^{f(ab)} = ab = e^{f(a)}e^{f(b)} = e^{f(a)+f(b)}.$$

A igualdade $\mathrm{id} = \exp \circ f$ implica em particular que exp é injetora na imagem de f; logo $f(ab) = f(a) + f(b)$. Em particular, como $e^{f(1)} = 1 = e^0$, temos $f(1) = 0$.

Se o domínio G também é conexo, então todos os ramos do logaritmo são traslados de um ramo fixo por um múltiplo de $2\pi i$:

Proposição 4.26. *Seja* G *um subconjunto aberto em* $\mathbb{C}$. *Se* G *é conexo e* f *é um ramo do logaritmo sobre* G, *então*

$$\{ \textit{ todos os ramos do logaritmo } \} = \{f + k \cdot 2\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração: Se f é um ramo do logaritmo, então para todo k em $\mathbb{Z}$ a função $g = f + k \cdot 2\pi i$ também é um ramo do logaritmo pois

$$e^g = e^{f+k2\pi i} = e^f \cdot e^{k2\pi i} = \mathrm{id} \cdot (e^{2\pi i})^k = \mathrm{id} \cdot 1^k = \mathrm{id}.$$

Vice-versa, se f e g são secções, então

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}[f(z) - g(z)]$$

é contínua sobre G e, como

$$e^{f(z)-g(z)} = e^{f(z)}e^{-g(z)} = \mathrm{id} \cdot \mathrm{id}^{-1} = 1,$$

temos $h(\mathrm{G}) \subseteq \mathbb{Z}$. Como G é conexo e h contínua, $h(\mathrm{G})$ é conexo; logo, existe k em $\mathbb{Z}$ tal que $h(\mathrm{G}) = \{k\}$; isto é, $g = f + k \cdot 2\pi i$. □

Como $\exp(z) \neq 0$ para todo z em $\mathbb{C}$, necessariamente $0 \notin \mathrm{G}$. A função

$$\exp\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$$

é bijetora com inverso log definido por $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$. Por Corolário 4.24, a função

$$\exp(i\cdot)\colon] - \pi, \pi[\to \mathbb{S}^1 - \{-1\}$$

é bijetora; denote $\arg\colon \mathbb{S}^1 - \{-1\} \to] - \pi, \pi[$ o seu inverso: ela combina o arco co-seno $\cos^{-1}$ e arco seno $\sin^{-1}$ no sentido de que

$$\arg(\mathfrak{R}\cdot) = \cos^{-1} \quad \text{e} \quad \arg(\mathfrak{I}\cdot) = \sin^{-1}.$$

Como a interseção das imagens $]0, \infty[\cap (\mathbb{S}^1 - \{-1\}) = \{1\}$ é um conjunto unitário, concluímos que a função

$$\exp\colon \mathbb{R} \times i] - \pi, \pi[\to \mathrm{G}$$

com imagem (= o plano complexo com a fenda em $\{z : z \leq 0\}$)

$$]0, \infty[\times (\mathbb{S}^1 - \{-1\}) = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\} =: \mathrm{G}.$$

é bijetora.

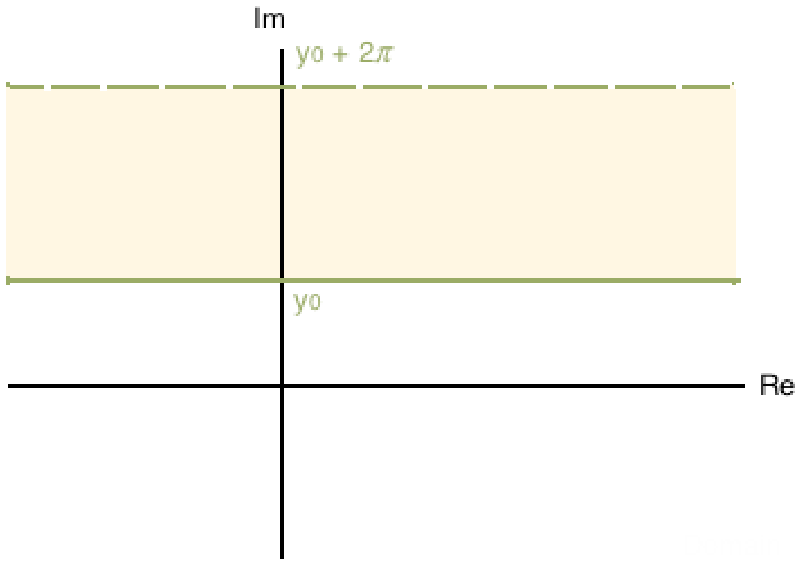

Figura 4.2: A imagem de todo ramo do logaritmo f é contida numa fita de espessura 2π. *Cautela*: f pode ser estendida a uma função bijetora entre o plano todo $\mathbb{C}$ e o produto com o intervalo semiaberto $\mathbb{R} \times i[y_0, y_0 + 2\pi[$ (em vez de $]y_0, y_0 + 2\pi)$; todavia, esta extensão não será mais contínua na reta $z \leq 0$!

Definição 4.27. O *ramo principal do logaritmo*, denotado por log, é dado por

$$\begin{aligned} \log\colon \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\} &\to \mathbb{R} \times i] - \pi, \pi[\\ z &\mapsto \log|z| + i \arg z \end{aligned}$$

Isto é, se $z = |z|e^{i\theta}$ com $|z| = e^r$, então $\log z = r + i\theta$.

Logo, por Proposição 4.26, para todo w em $\mathbb{C}$,

$$\exp^{-1}\{w\} = \{\log|w| + i(\arg w + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Em particular, a imagem de todo ramo do logaritmo, para garantir a injetividade da exponencial, é contida em uma fita $\mathbb{R} \times i(] - \pi + t, \pi + t[)$ de largura 2π com $t \in \mathbb{R}$. Para o ramo principal do logaritmo, $t = 0$.

Observemos que a aplicação bijetora

$$\exp(i\cdot)\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$$

é contínua, mas o seu inverso é descontínuo porque a sua imagem é compacta enquanto o domínio não é compacto. Com efeito, a função inversa pula abruptamente de 2π a 0 ao aproximar 1 em $\mathbb{S}^1$. Contudo, o inverso da sua restrição $]0,2\pi[\to \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ é contínua:

Lema 4.28. *O ramo principal do logaritmo é contínuo.*

Demonstração: Como $|\cdot|$ é contínua e $\log\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ é contínua, a parcela esquerda da soma que define $\log$ é contínua.

Mostremos que a parcela direita da soma é contínua: Denote $\arg\colon \mathbb{S}^1 - \{-1\} \to]-\pi,\pi[$ a função inversa à parcela direita $\exp(i\cdot)\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{S}^1 - \{-1\}$.

Seja z no domínio $D = \mathbb{S}^1 - \{-1\}$ de $\arg$. Mostremos que $\arg$ é contínua por ser *localmente contínua*, isto é, existe uma *vizinhança* (= um conjunto que contém um aberto) U de z tal que a imagem $V = \arg(U)$ é uma vizinhança de $\arg(z)$ e $\arg_{\restriction U}\colon U \to V$ é contínua.

Existe uma bola fechada B em $\mathbb{C}$ à volta de z que não contém -1. Mostremos que $\arg$ é contínua na vizinhança $U = B \cap D$; isto é, mostremos que a pré-imagem de todo subconjunto fechado F em $V = \arg(U)$ é fechada.

Como U é fechado, $V = \arg(U) = \exp(i\cdot)^{-1}(U)$ é fechado como pré-imagem da função contínua $\exp(i\cdot)$. Como o domínio de $\exp(i\cdot)$ é limitado, V é limitado. Concluímos pelo Teorema de Heine-Borel que V é compacto.

Como $\exp(i\cdot)$ é contínua, a imagem de todo subconjunto compacto é compacta. Logo a pré-imagem $\arg^{-1}(F) = \exp(i\cdot)(F)$ de todo subconjunto F que é fechado em V é compacta; em particular, é fechada.

Concluímos que ambas as parcelas da soma do ramo principal do logaritmo são contínuas, logo ele é contínuo. □

Isto explica porque a projeção de nenhum ramo do logaritmo ao eixo imaginário contém um intervalo semiaberto $[t,t+2\pi[$, mas apenas um aberto intervalo aberto $]t,t+2\pi[$. Logo, uma fenda no domínio no plano complexo de todo ramo do logaritmo é inevitável.

Corolário 4.29. *Todo ramo do logaritmo f é diferenciável com derivada $f'(z) = z^{-1}$.*

Demonstração: Por Lema 4.28 as condições de Proposição 3.10 são satisfeitas. □

Definição. Uma *região* é um subconjunto G em $\mathbb{C}$ que é aberto e conexo.

Para b em $\mathbb{C}$, define

$$\begin{aligned} \cdot^b\colon G &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp(b\log(z)). \end{aligned}$$

Exercício 4.30. Mostra que $\{\exp(ik) : k \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{S}^1$.

Dica. Como

$$]0,1[\xrightarrow{2\pi\cdot}]0,2\pi[\xrightarrow{\exp(i\cdot)} \mathbb{S}^1 - \{-1\}$$

é um homeomorfismo, equivale mostrar que

$$\mathrm{D} = \{r(n\delta) : n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em $]0,1[$ onde $0 < \delta := \frac{1}{2\pi} < 1$ e $r\colon [0,\infty[\to [0,1[$ é definida por $x = n(x) + r(x)$ com $n(x)$ em $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, basta mostrar que D é denso em $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Isto é, para toda fração positiva $\frac{k}{l} < 1$ existe n em $\mathbb{N}$ tal que $0 < r(n\delta) - \frac{k}{l} < \frac{1}{l}$, ou, equivalentemente, tal que

$$r(n\delta) > \frac{l-1}{k}. \tag{$*$}$$

Escrevendo $nx = \mathrm{N} + s$ com N em $\mathbb{N}$ e s em $[0,1[$, obtemos

$$r(mnx) = r(m\mathrm{N} + ms) = r(ms) = r(mr(nx)).$$

Suponha que já mostramos $\inf\{r(nx) : n \in \mathbb{Z}\} = 0$: Logo, existe n tal que $\epsilon := r(n\delta) < \frac{1}{l}$. Seja m mínimo tal que $(m+1)\epsilon > 1$. Logo

$$m\epsilon > 1 - \epsilon > \frac{k-1}{k} > \frac{l-1}{k};$$

logo, pela multiplicatividade

$$m\epsilon = mr(n\delta) = r(mr(n\delta)) = r(mn\delta),$$

obtemos $r(mn\delta) > \frac{l-1}{k}$; isto é, $(*)$.

Falta mostrar $\inf\{r(nx) : n \in \mathbb{N}\} = 0$: Seja n mínimo tal que $n\delta > 1$.

Como π é irracional, logo δ é irracional. Logo $0 < r(n\delta) < \delta$ (ou equivalentemente, por contraposição, se fosse igual, δ seria racional). Iterando, encontramos n_1, n_2, …tal que

$$r(n_k \ldots r(n_2 r(n_1\delta))) = r(n_k \cdots n_2 n_1 \cdot \delta) \to 0$$

para $k \to \infty$.

5. Integral de Riemann-Stieltjes

Revisitemos brevemente a integração real para inspirar a sua definição sobre o plano complexo:

5.1. Integração Real ou a Integral por Somas de Riemann

Nesta subsecção, aproximaremos a área abaixo de uma curva (até o eixo-x) por fitas mais e mais finas como em Figura 5.1.

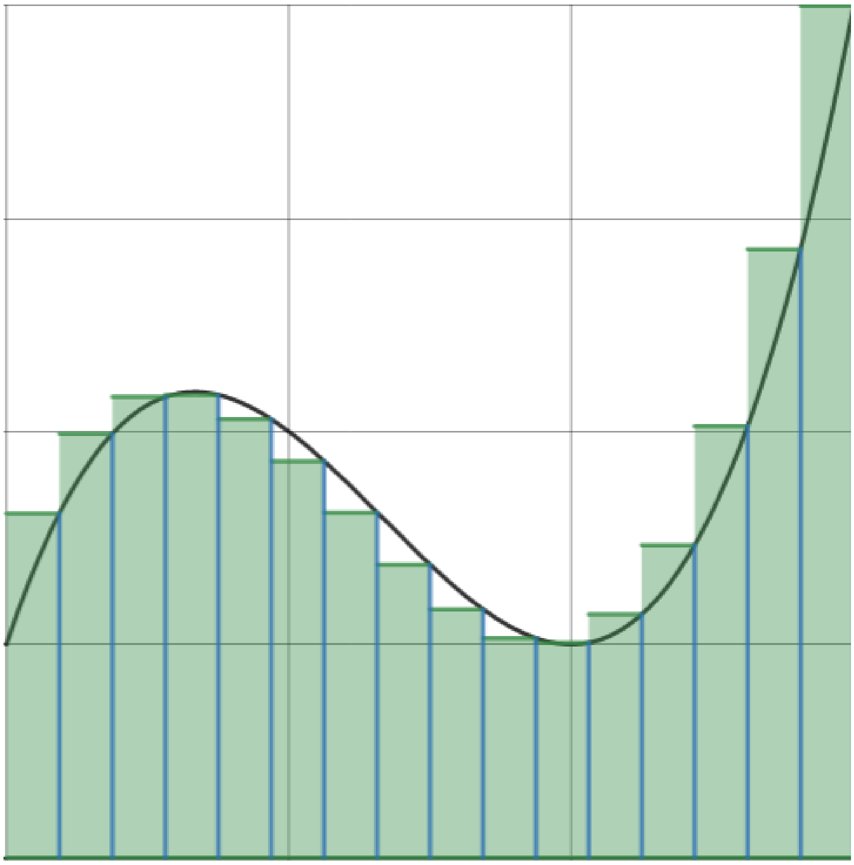

Figura 5.1: Fitas mais e mais finas aproximam-se da área abaixo da curva.

Exemplo 5.1.

(i) Calculemos a soma à direita e à esquerda da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1,2]$ para $n = 5$ fitas.

(ii) Uma tabela para $n = 5, 10, \ldots, 1000$ mostra a aproximação à área em etapas.

(iii) Para uma função $f(x)$ arbitrária e um número de fitas n arbitrário, vide `https://www.desmos.com/calculator/tgyr42ezjq`, `https://www.desmos.com/calculator/c5seq9ltar` ou `https://www.geogebra.org/m/qrgbJExb`.

Definição 5.2 (Soma de Riemann). Para uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ de $[a, b]$ e pontos de base $\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}$ em $[t_0, t_1], \ldots, [t_{m-2}, t_{m-1}]$, denote

$$S(f; P, \tau) = \sum_{k=1,\ldots,m} f(\tau_k)\Delta_k$$

com $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$.

Definição 5.3 (Integral de Riemann). Se o limite das Somas de Riemann $S(f, P, \tau)$ existe, isto é, existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P e pontos $\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}$ tais que

$$|I - S(f; P, \tau)| < \epsilon,$$

então f é *integrável*. Denote $\int_a^b f(x)\, dx := I$ este limite. E chamamo-lo de *integral (determinada) da função $f(t)$ entre a e b.*

Historicamente, o símbolo anguloso Σ da soma deu lugar ao símbolo curvado da integral $\int$.

Como alternativa mais simples à integral de Riemann, existem as Somas de Darboux e a Integral de Darboux onde os pontos arbitrários τ_k nos intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ são substituídos pelo

- ponto ι_k do valor ínfimo de f, e
- ponto σ_k do valor supremo de f

neste intervalo com a soma (de Darboux) inferior e a soma (de Darboux) superior definidas por

$$I(f; P) = \sum_{k=1,\ldots,m} f(\iota_k)\Delta_k \quad \text{e} \quad S(f; P) = \sum_{k=1,\ldots,m} f(\sigma_k)\Delta_k$$

com a propriedade $I(f; P) \leq S(f; P)$. A função f é *integrável* (segundo Darboux), se o limite $\lim_P I(f; P) = I = \lim_P S(f; P)$ existe.

Enquanto a definição de Riemann é mais geral, o critério de Darboux é suficiente:

Fato. *Uma função é integrável segundo Darboux se, e tão-somente se, é integrável segundo Riemann.*

Fato (Critério suficiente para uma função ser integrável). *Se f é*

(i) *contínua, ou,*

(ii) *monótona, ou,*

(iii) *se existe uma partição do intervalo total em subintervalos tal que as restrições de f são da primeira ou segunda forma; por exemplo, se f é* contínua por troços *(= as aduelas de um molde de canhão), isto é, tem só um número finito de pulos (= pontos de descontinuidade),*

então f é integrável.

Se f é integrável, por exemplo, contínua por troços, basta, por exemplo, estudar o limite para $n \longrightarrow \infty$ das partições equidistantes n-uplas do intervalo $[a, b]$, isto é, $\Delta x_k = h$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$e

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh = b.$$

Se a cota superior do intervalo b é variável, então chamamos a integral de *integral indeterminada* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. A função $\mathrm{I}\colon b \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mede a área entre o eixo-x e a curva da função f no intervalo $[a, b]$.

Teorema 5.4 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja f uma função contínua. Toda integral indeterminada $\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é uma* função primitiva *de $f(x)$, isto é,*

$$\mathrm{I}'(x) = f(x).$$

Demonstração: Tem-se $\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$. Podemos estimar a área $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ por $hf(t_{\min})$ para baixo e por $hf(t_{\max})$ para cima; aqui $t_{\min}$ e $t_{\max}$ sejam o mínimo e máximo de $f(t)$ no intervalo $[x, x+h]$. Pelo Teorema de valor intermediário,

$$\frac{\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = f(t_0) \quad \text{para algum } t_0 \in [x, x+h].$$

Segue

$$\mathrm{I}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(t_0) = f(x),$$

pois $x \leq t_0 \leq x + h$ e $h \longrightarrow 0$. □

A função F que devolve a área abaixo da curva da função f até certo ponto é uma *antiderivada* de f, isto é, $F' = f$. Podemos aproximá-la por fitas equidistantes mais e mais finas que aproximam esta área, como acontece em Figura 5.2.

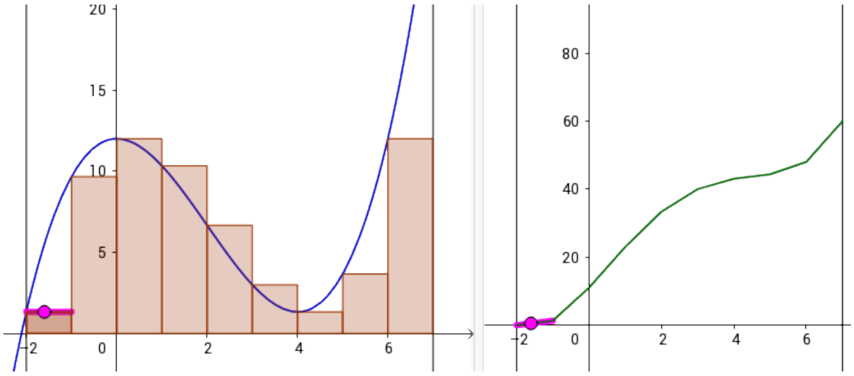

Figura 5.2: A antiderivada como área aproximativa abaixo da curva da função.

O site `https://mathinsight.org/calculating_area_under_curve_riemann_sums` mostra como a função dada pela área aproximativa (das somas das áreas das fitas) se aproxima por fitas mais e mais finas da função primitiva.

Contudo, existem receitas mais graciosas para calcular a antiderivada:

Definição 5.5. Toda função primitiva F da função f é denotada por $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (e todas elas são, exceto adição por uma constante C, iguais).

Exemplo 5.6.

(i) $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(ii) $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

(iii) $\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C$

Proposição 5.7. *Se* F *é uma função primitiva da função contínua* f *em* $[a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Observamos acima que $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C_0$ para uma constante C_0. Mais exatamente, $F(a) + C_0 = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, logo $C_0 = -F(a)$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x) = F(b) + C_0 = F(b) - F(a).$$

5.2. Integração ao longo de caminhos

Um *caminho* é uma função contínua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cujo domínio é um intervalo fechado da reta $\mathbb{R}$. Observemos que [Con95, Chapter IV] faz muito esforço para introduzir a integral sobre caminhos (contínuos e) retificáveis, mas não necessariamente diferenciáveis (por troços); enquanto [Car61, Chapitre II] só a define sobre caminhos diferenciáveis (por troços), o que evita muitos argumentos técnicos rotineiros, a um custo de generalização patível a todos os fins de aplicação, visto que

- todo caminho retificável, fora de pré-composição com um homeomorfismo entre intervalos fechados reais, é Lipschitz contínua, [Haz02] e
- pelo Teorema de Rademacher, [Mur15], uma função Lipschitz contínua é diferenciável em quase todo ponto, isto é, é diferenciável em todo ponto exceto em um conjunto de medida (de Lebesgue) zero.

Logo, a classe de caminhos omitida por [Car61] é a das funções Lipschitz-contínuas que não são diferenciáveis em um conjunto infinito de medida (de Lebesgue) zero. Um exemplo de uma tal função omitida é a *função de Cantor* $c : [0,1] \to [0,1]$ que é monotonamente crescente, Lipschitz contínua e diferenciável com derivada nula em quase todo todo ponto; dado x, o seu valor $c(x)$ é definido como segue:

1. Expande x na base 3 tal que o dígito ternário 1 aparece o menos possível; isto é, se a expansão termina em $022222\ldots = 100000\ldots$ ou $200000\ldots = 122222\ldots$, uses a expansão ao lado esquerdo de cada igualdade.
2. Substitui o primeiro dígito ternário 1 por 2 e todos os restantes atrás dele por um 0.
3. Substitui cada dígitos ternário 2 por 1.
4. Interpreta o resultado como um número binário para obter $c(x)$.

Comprimento de Caminhos. Uma *partição* de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ que contém os pontos extremos do intervalo e um número finito de pontos entre eles, e os quais serão sempre enumerados em ordem ascendente. A sua *trama* (ou *malha*) $\|P\|$ é definida pela maior distância entre os seus pontos, isto é,

$$\|P\| \coloneqq \max\{(t_k - t_{k-1}) : k = 1,\ldots,m\}.$$

Definição 5.8. Uma função $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ para um intervalo em $\mathbb{R}$ é de *variação limitada* se existe uma constante $M > 0$ tal que para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ de $[a,b]$ a *variação*

$$v(\gamma; P) := \sum_{k=1,\ldots,m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

A *variação total* de γ é

$$V(\gamma) := \{v(\gamma; P) : P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

Geometricamente, uma função tem variação limitada se o comprimento do seu caminho é finito.

Observação 5.9. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada.

- Se P e Q são partições de $[a,b]$ e Q refina P, isto é, $Q \supseteq P$, então $v(\gamma; Q) \geq v(\gamma; P)$.
- Se $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é de variação limitada, e α e β em $\mathbb{C}$, então $\alpha\gamma + \beta\sigma$ é de variação limitada e $V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |a|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma)$.

Se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é diferenciável por troços, podemos aplicar a integral de Riemann à função $|\gamma'(\cdot)|\colon [a,b] \to [0,\infty[$:

Proposição 5.10. *Se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é diferenciável por troços, então γ é de variação limitada e*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Pela definição da variação, para uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$, e da definição da integral de Riemann,

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1,\ldots,m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \approx \sum_{k=1,\ldots,m} |\gamma'|(t_k)[t_k - t_{k-1}] \to \int_a^b |\gamma'|(t)\,\mathrm{d}t$$

para $m \to \infty$. Explicitemos esta heurística preliminar:

Demonstração: Assumamos que γ seja (continuamente) diferenciável; como uma função diferenciável por troços é uma soma de funções diferenciáveis, e V é aditivo, se demonstrarmos igualdade para tal γ (continuamente) diferenciável, segue a para γ (continuamente) diferenciável por troços.

Seja
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}.$$
Pela definição,
$$\begin{aligned} v(\gamma; P) &= \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1,\ldots,m} \left| \int_a^b \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \sum_{k=1,\ldots,m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t = \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$
Consequentemente,
$$V(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t,$$
então γ é de variação limitada.

Como γ' é contínua, γ' é uniformemente contínua; então, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que $|s - t| < \delta_1$ implica que
$$|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon.$$
Também podemos escolher $\delta_2 > 0$ tal que se $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ e
$$\|P\| = \max\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq m\} < \delta_2,$$
então
$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|\, (t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$
onde τ_k é algum ponto em $[t_{k-1}, t_k]$. Consequentemente,
$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} |\gamma'(\tau_k)|\, (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k)\, \mathrm{d}t \right| \\ &= \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t) + \gamma'(t)]\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)]\, \mathrm{d}t \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)|\, \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \end{aligned}$$

Se

$$\|P\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

então $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \varepsilon$ para t em $[t_{k-1}, t_k]$, e

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \varepsilon + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \varepsilon + \varepsilon(b-a) + v(\gamma; P) \\ &\leq \varepsilon[1 + (b-a)] + V(\gamma).\end{aligned}$$

A penúltima desigualdade vale porque γ é de variação limitada. Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq V(\gamma)$$

o que produz a igualdade. □

Definição. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho. O *traço* (ou a *trajetória*) de γ, denotada por $\{\gamma\}$, é a sua imagem (compacta) $\gamma([a,b])$. O caminho é *retificável* se a sua variação é limitada.

Observação. Se P é uma partição de $[a,b]$, então $v(\gamma; P)$ é a soma de comprimentos de segmentos retilíneos que conectam pontos sobre o traço de γ. Geometricamente, γ é retificável se, e tão-somente se, o traço de γ tem comprimento finito; este comprimento é $V(\gamma)$. Se γ é (continuamente) diferenciável por troços, então γ é retificável e o comprimento do seu traço é $\int_a^b |\gamma'|\,\mathrm{d}t$.

Exemplo 5.11. Dificilmente um caminho (contínuo) tem comprimento infinito. Pela proposição precedente, tem de haver um número infinito de pontos em que ele não seja diferenciável. Demos o exemplo [Lim81, II.4.7] de um caminho cuja trajetória é infinitamente longa: Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $t \mapsto (t, \phi(t))$, isto é, o caminho que percorre o gráfica da função $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por ter, em cada intervalo

$$\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}\right]$$

o gráfico na forma de um triângulo isósceles de altura $\frac{1}{n+1}$ e $\phi(1) = 0$. Com a partição

$$P_n = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1\right\}$$

do intervalo $[0,1]$, veremos que $v(\mathrm{P}_n)$ é a soma dos comprimentos dos lados inclinados dos $n+1$ primeiros triângulos isósceles que formam o gráfico de ϕ; logo $v(\gamma,\mathrm{P}_n) >$ a soma das alturas desses triângulos, ou seja,

$$v(\gamma,\mathrm{P}_n) > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} \to \infty \quad \text{para } n \to \infty.$$

Integral de Riemann-Stieltjes. Observaremos que a definição da integral (de Riemann) sobre um intervalo da reta $\mathbb{R}$ é a sobre o caminho $\gamma = \mathrm{id}$ no plano complexo $\mathbb{C}$. A contribuição de Stieltjes era justamente esta generalização da integração, da identidade a uma função contínua arbitrária; geometricamente, a de um caminho reto a um tortuoso:

Teorema 5.12. *Seja* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *de variação limitada e suponha que* $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *é contínua. Então existe um número complexo* I *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que quando* $\mathrm{P} = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_m\}$ *é uma partição de* $[a,b]$ *com*

$$\|\mathrm{P}\| = \max\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \le k \le m\} < \delta,$$

então

$$\left|\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right]\right| < \varepsilon$$

para qualquer escolha de pontos τ_k *com* $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$.

Demonstração: Como f é contínua sobre um domínio compacto, f é uniformemente contínua; portanto, podemos encontrar por indução números positivos

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots$$

tal que se

$$|s-t| < \delta_m, \left|f(s) - f(t)\right| < \frac{1}{m}.$$

Para cada $m \ge 1$ seja $\mathscr{P}_m =$ a coleção de todas as partições P de $[a,b]$ com $\|\mathrm{P}\| < \delta_m$; então $\mathscr{P}_1 \supset \mathscr{P}_2 \supset \ldots$. Defina F_m como o fecho do conjunto

$$\left\{\sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] : \mathrm{P} \in \mathscr{P}_m \text{ e } t_{k-1} \le \tau_k \le t_k\right\}. \tag{$*$}$$

A seguir, afirmemos que:

$$\mathrm{F}_1 \supset \mathrm{F}_2 \supset \ldots \quad \text{e} \quad \operatorname{diam} \mathrm{F}_m \le \frac{2}{m}\mathrm{V}(\gamma). \tag{$**$}$$

Se isto ocorrer, então, pelo Teorema de Cantor, Teorema 2.22, existirá exatamente um número complexo I tal que $\mathrm{I} \in \mathrm{F}_m$ para todo $m \geq 1$.

Provemos que isto completará a demonstração: Se $\varepsilon > 0$, seja $m > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \mathrm{V}(\gamma)$; então

$$\varepsilon > \left(\frac{2}{m}\right) \mathrm{V}(\gamma) \geq \operatorname{diam} \mathrm{F}_m .$$

Desse modo $\mathrm{I} \in \mathrm{F}_m$, $\mathrm{F}_m \subset \mathrm{B}(\mathrm{I}; \varepsilon)$. Portanto, se $\delta = \delta_m$, então o teorema está provado.

Demonstremos ora $(**)$: Que $\mathrm{F}_1 \supset \mathrm{F}_2 \supset \ldots$ segue trivialmente de que $\mathscr{P}_1 \supset \mathscr{P}_2 \supset \ldots$. Para mostrar que $\operatorname{diam} \mathrm{F}_m \leq \frac{2}{m} \mathrm{V}(\gamma)$ é suficiente mostrar que o diâmetro do conjunto em $(*)$ é $\leq \frac{2}{m} \mathrm{V}(\gamma)$.

Se $\mathrm{P} = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ é uma partição denotaremos $\mathrm{S}(\mathrm{P})$ uma soma da forma

$$\sum f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right]$$

onde τ_k é qualquer ponto com $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$.

Fixe $m \geq 1$ e seja $\mathrm{P} \in \mathscr{P}_m$; o primeiro passo será mostrar que se $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$ (e consequentemente $\mathrm{Q} \in \mathscr{P}_m$), então

$$\left|\mathrm{S}(\mathrm{P}) - \mathrm{S}(\mathrm{Q})\right| \leq \frac{1}{m} \mathrm{V}(\gamma) .$$

Apenas fornecemos a prova para o caso onde Q é obtido adicionando um ponto extra à partição P Seja $1 \leq p \leq m$ e seja $t_{p-1} < t^* < t_p$; suponha que

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P} \cup \{t^*\} .$$

Se $t_{p-1} \leq \sigma \leq t^*$, $t^* \leq \sigma' \leq t_p$, e

$$\mathrm{S}(\mathrm{Q}) = \sum_{k \neq p} f(\sigma_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] + f(\sigma)\left[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right] + f(\sigma')\left[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)\right]$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}(\mathrm{P}) \\
&= \sum_{k \neq p} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] + f(\tau_p)\left[\gamma(t_p) - \gamma(t_{p-1})\right] \\
&= \sum_{k \neq p} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] + f(\tau_p)\left[\gamma(t_p) - \gamma(t^*) + \gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right] \\
&= \sum_{k \neq p} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] + f(\tau_p)\left[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)\right] + f(\tau_p)\left[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right] .
\end{aligned}$$

então, usando que $\left|f(\tau) - f(\sigma)\right| < \frac{1}{m}$ para $|\tau - \sigma| < \delta_m$,

$$
\begin{aligned}
&\left|S(P) - S(Q)\right| \\
= &\left|\sum_{k \neq p} \left[f(\tau_k) - f(\sigma_k)\right]\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right]\right. \\
&\left. + \left[f(\tau_p) - f(\sigma)\right]\left[\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right] + \left[f(\tau_p) - f(\sigma')\right]\left[\gamma(t_p) - \gamma(t^*)\right]\right| \\
\leq &\frac{1}{m}\sum_{k \neq p} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \frac{1}{m}\left|\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right| + \frac{1}{m}\left|\gamma(t_p) - \gamma(t^*)\right| \\
\leq &\frac{1}{m}\left[\sum_{k \neq p} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \left|\gamma(t^*) - \gamma(t_{p-1})\right| + \left|\gamma(t_p) - \gamma(t^*)\right|\right] \leq \frac{1}{m}V(y).
\end{aligned}
$$

Para a segunda e última etapa sejam P e R duas partições quaisquer em $\mathcal{P}_m$. Então $Q = P \cup R$ é uma partição que contem tanto P quanto R. Usando a primeira parte, obtemos

$$
\begin{aligned}
|S(P) - S(R)| &\leq \left|S(P) - S(Q)\right| + \left|S(Q) - S(R)\right| \\
&= \frac{1}{m}V(\gamma) + \frac{1}{m}V(\gamma) = \frac{2}{m}V(\gamma).
\end{aligned}
$$

Segue que o diâmetro de $(*)$ é $\leq \frac{2}{m}V(\gamma)$. □

Definição 5.13. Este número I é chamado a *integral* de f com respeito à γ sobre $[a, b]$ e é designado por

$$\int_a^b f\, d\gamma := \int_a^b f(t)\, d\gamma(t) = I.$$

Quanto à comparação da notação da integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\, d\gamma$ com a de Riemann $\int_a^b f\, dt$, realçamos que a de Riemann-Stieltjes é a generalização da de Riemann para caminhos $\gamma \neq \mathrm{id}$. Se $\gamma = \mathrm{id}\colon t \mapsto t$, então, como se costuma (por exemplo, na notação $f(x)$ para um função f), denotemos γ pelo o seu valor t para obter a notação da integral de Riemann.

Proposição 5.14 (Linearidade do caminho). *Sejam f e g contínuas sobre $[a, b]$ e sejam γ e σ funções de variação limitada sobre $[a, b]$. Para todos os escalares α e β:*

(i) $\int_a^b \alpha f + \beta g\, d\gamma = \alpha \int_a^b f\, d\gamma + \beta \int_a^b g\, d\gamma$

(ii) $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha\gamma + \beta\sigma = \alpha \int_a^b f \, \mathrm{d}\gamma + \beta \int_a^b f \, \mathrm{d}\sigma$

Proposição 5.15 (Linearidade do integrando). *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada e $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Para $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$,*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\gamma = \sum_{k=1,\ldots,m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \, \mathrm{d}\gamma$$

Demonstração: Decompõe γ como soma de parcelas que coincidem com γ sobre os troços de t_k a t_{k+1} e desvanecem além. □

Teorema 5.16. *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ de variação limitada e $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Se γ é diferenciável por troços e f é contínua, então*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pelas definições da integral de Riemann-Stieltjes (para um caminho γ) sobre o plano complexo e da integral de Riemann da função $f \cdot \gamma'$,

$$\int f \, \mathrm{d}\gamma \leftarrow \sum_{k=1}^{m} f(t_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \approx \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\gamma'(t_k)[t_k - t_{k-1}] \to \int_a^b f(t)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$

para $m \to \infty$. Explicitemos esta heurística preliminar:

Demonstração: Assumamos, novamente, que γ seja (continuamente) diferenciável; como uma função diferenciável por troços é uma soma de funções diferenciáveis, e V é aditivo, se demonstrarmos igualdade para tal γ (continuamente) diferenciável, segue a para γ (continuamente) diferenciável por troços.

Também, olhando para as partes real e imaginária de γ, reduzimos a prova para o caso onde $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}$.

Seja $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta > 0$ tal que se $\mathrm{P} = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ com $\|\mathrm{P}\| < \delta$, então

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}\gamma - \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (*)$$

e

$$\left| \int_a^b f(t)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\gamma'(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (**)$$

para qualquer escolha de τ_k em $[t_{k-1}, t_k]$. Pelo Teorema do Valor Médio existe τ_k em $[t_{k-1}, t_k]$ com

$$\gamma'(\tau_k) = \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$$

(Observemos que γ sendo um valor real foi preciso para aplicar o Teorema do Valor Médio.) Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\left[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\gamma'(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1})$$

Combinando isto com as inequações $(*)$ e $(**)$ obtemos

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\gamma - \int_a^b f(t)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, isto completa a prova do teorema. □

Integral ao longo de um caminho. Quando o integrando é avaliado nos valores do caminho, a integral chama-se de uma *integral ao longo de um caminho*:

Definição. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho e f uma função definida sobre o traço de γ. Se γ é retificável e f é contínua, então a *integral* de f ao longo de γ, é

$$\int_\gamma f \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma(t).$$

Outra notação é $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Exemplo 5.17. Como exemplo vamos tomar $\gamma\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ pondo $\gamma(t) = e^{it}$ e defina $f(z) = \frac{1}{z}$ para $z \neq 0$. Agora, γ é diferenciável então, pelo Teorema precedente,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-it}\left(ie^{it}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Usando a mesma definição de γ e sendo m algum inteiro ≥ 0,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^m dz &= \int_0^{2\pi} e^{imt}\left(ie^{it}\right)\mathrm{d}t \\
&= i\int_0^{2\pi} \exp\left(i(m+1)t\right)\mathrm{d}t \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos\left[(m+1)t\right]\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \sin\left[(m+1)t\right]\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

Um *homeomorfismo entre intervalos* é uma função $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ estritamente monótona, isto é,

- ou cresce *de maneira estritamente monótona*, isto é, $x < y$ implica $\phi(x) < \phi(y)$, com $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$.
- ou decresce *de maneira estritamente monótona*, isto é, $x < y$ implica $\phi(x) > \phi(y)$, com $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$.

Proposição 5.18. *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho. Se $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ é um homeomorfismo crescente entre intervalos, então para toda função f contínua sobre $\{\gamma\}$*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\phi} f.$$

Demonstração: A heurística é que ϕ transforma uma partição em outra partição. Como a integral $\int_\gamma$ é definida por um limite sobre *todas* as partições, ele é preservada sob aplicação de ϕ às partições. □

Gostaríamos de identificar caminhos cujas integrais são iguais. Contudo, a relação $\sigma = \gamma \circ \phi$ para uma tal função ϕ em geral não é uma relação de equivalência, mas precisamos de impor condições adicionais:

Definição. Sejam $\sigma\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ e $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ caminhos retificáveis. O caminho σ é *equivalente* a γ se existe uma *substituição de parâmetro*, isto é, se existe um homeomorfismo entre intervalos $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ tal que $\sigma = \gamma \circ \phi$.

Uma *curva* é uma classe de equivalência de caminhos, isto é, um conjunto

$$\{\gamma \circ \phi : \phi\colon [c,d] \to [a,b] \text{ homeomorfismo entre intervalos}\}$$

e o *traço* de uma curva é o de qualquer um dos seus membros. Uma curva é *diferenciável (por troços)* se um dos seus representantes é diferenciável (por troços).

Como fato, vide [Haz02], notemos que uma definição equivalente: um caminho é *retificável* se é composição $\gamma \circ \phi$ de um homeomorfismo $\phi\colon [a,b] \to [a,b]$ e uma função Lipschitz contínua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Logo, uma curva, uma classe de caminhos retificáveis, é dada pelo conjunto

$$\{\gamma \circ \phi : \phi\colon [c,d] \to [a,b] \text{ homeomorfismo entre intervalos }\}$$

com $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ Lipschitz contínua.

Frequentemente, não distinguiremos entre uma curva e um dos seus representantes.

Definição 5.19. Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho retificável e para $t \in [a,b]$. Define a função $\|\gamma\|\colon [a,b] \to [0,\infty[$ por

$$t \mapsto \mathrm{V}\left(\gamma\restriction_{[a,t]}\right) = \sup\left\{\sum_{k=1,\dots,n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|\colon \{t_0,\dots,t_n\} \text{ partição de } [a,t]\right\}.$$

A função $\|\gamma\|$ é monotonamente crescente e de variação limitada. Se f é contínua sobre $\{\gamma\}$, define

$$\int_\gamma f|\mathrm{d}z| := \int_a^b f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\|\gamma\|(t)$$

onde usemos a primeira definição da integral $\int \mathrm{F}\,\mathrm{d}\Gamma$ para $\mathrm{F} = f \circ \gamma$ e $\Gamma = \|\gamma\|$.

Definição. Se γ é um caminho retificável, então

- denote $-\gamma$ ou γ^{-1} a curva definida por $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ para $t \in [-b,-a]$, e
- denote $\gamma + c$ para $c \in \mathbb{C}$ a curva definida por $\gamma + c(t) = \gamma(t) + c$.

Proposição 5.20. *Seja γ um caminho retificável e f uma função contínua sobre $\{\gamma\}$.*

(i) $\int_\gamma f = -\int_{-\gamma} f$

(ii) $|\int_\gamma f| \leq \int_\gamma |f|\,\mathrm{d}z \leq \mathrm{V}(\gamma)\sup\{|f(z)| : z \in \{\gamma\}\}$

(iii) $|\int_\gamma f| \leq \int_{\gamma+c} |f(z-c)|\,\mathrm{d}z$ *para* $c \in \mathbb{C}$.

Teorema 5.21 (Análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja* G *aberto em* $\mathbb{C}$ *e* $\gamma\colon [a,b] \to \mathrm{G}$ *um caminho retificável e seja* $f\colon \mathrm{G} \to \mathbb{C}$. *Se* f *é contínua e existe* $\mathrm{F}\colon \mathrm{G} \to \mathbb{C}$ *com* $\mathrm{F}' = f$, *então*

$$\int_\gamma f = \mathrm{F}(\gamma(b)) - \mathrm{F}(\gamma(a)).$$

Demonstração: Se γ é diferenciável por troços, então o teorema decorre via Teorema 5.16 do Teorema Fundamental do Cálculo (sobre a reta real); em mais detalhes:

$$\int_\gamma f = \int f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma(t) = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\gamma(b)) - \mathrm{F}(\gamma(a))$$

Se γ seja arbitrário, apliquemos a seguinte heurística: Dada uma partição P, seja $\Gamma = \Gamma(\mathrm{P})\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ o caminho retilíneo, em particular, diferenciável por troços, que aproxima γ definida por

$$\Gamma\colon t \mapsto \frac{1}{t_k - t_{k-1}}[(t_k - t)\gamma(t_{k-1}) + (t - t_{k-1})\gamma(t_k)]$$

sobre o troço $[t_{k-1}, t_k]$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Obtemos, pelo primeiro caso,

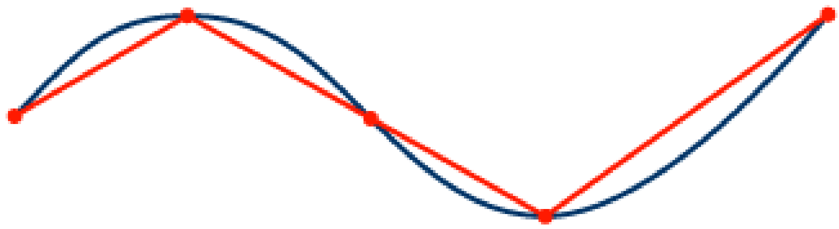

Figura 5.3: Uma aproximação retilínea a um caminho.

$$\int_\Gamma f = \mathrm{F}(\Gamma(b)) - \mathrm{F}(\Gamma(a)).$$

Como $\gamma(b) = \Gamma(b)$ e $\gamma(a) = \Gamma(a)$, logo $\mathrm{F}(\Gamma(b)) - \mathrm{F}(\Gamma(a)) = \mathrm{F}(\gamma(b)) - \mathrm{F}(\gamma(a))$. Para concluir a demonstração, precisamos de mostrar que $\int_\Gamma f \to \int_\gamma f$ para $\|\mathrm{P}\| \to 0$, isto é, por Teorema 5.16,

$$\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,\mathrm{d}t \to \int f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\gamma(t) = \lim_{\|\mathrm{P}\|\to 0} \sum_{k=1,\ldots,m} f(\gamma(\tau_k))[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$$

para partições $\mathrm{P} = \{a = t_0 < \ldots < t_m = b\}$ e pontos $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$ entre os pontos da partição. Pela definição de Γ,

$$\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1,\ldots,m} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))\,\mathrm{d}t,$$

logo

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1,\ldots,m} f(\gamma(\tau_k))[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\right| \\
&= \left|\sum_{k=1,\ldots,m} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t)) - f(\gamma(\tau_k))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sum_{k=1,\ldots,m} \left|\frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\Gamma(t)) - f(\gamma(\tau_k))|\,\mathrm{d}t < \epsilon
\end{aligned}$$

para $\|P\| < \delta$ suficientemente pequena por γ e f serem uniformemente contínuas sobre os seus domínios compacto. $\square$

Corolário 5.22. *Seja* G *aberto em* $\mathbb{C}$ *e* $\gamma\colon [a,b] \to G$ *um caminho retificável e seja* $f\colon G \to \mathbb{C}$. *Se* f *é contínua e existe* $F\colon G \to \mathbb{C}$ *com* $F' = f$ *e* γ *é* fechado, *isto é,* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *então*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Observação (Cautela!). Enquanto sobre $\mathbb{R}$ toda função contínua f tem uma função *primitiva*, isto é, uma função F tal que $F' = f$, isto não vale mais sobre $\mathbb{C}$: Por exemplo, seja f a função contínua $z \mapsto |z|^2 = x^2 + y^2$. Se F fosse uma primitiva de f, então F satisfaria as equações de Cauchy-Riemann, em contradição ao que $\Im f = 0$.

6. Integração ao longo de Círculos

Veremos que o valor $b = f(a)$ de uma função $f\colon G \to \mathbb{C}$ (continuamente) diferenciável em um ponto a é determinada pelos seus valores em um círculo à volta de a.

Proposição 6.1. *Seja $\phi\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ uma função. Se ϕ é contínua, em particular integrável ao fixar cada um dos seus dois argumentos, então a função*

$$g = \int_a^b \phi(s,\cdot)\,\mathrm{d}s$$

sobre $[c,d]$, que calcula a média de ϕ no primeiro argumento, é contínua. Se ϕ é diferenciável ao fixar o seu primeiro argumento, com derivada $\phi_t = \frac{\partial\phi}{\partial t}$ e $\phi_t\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ é contínua, então g é continuamente diferenciável com derivada

$$g' = \int_a^b \phi_t(s,\cdot)\,\mathrm{d}s. \tag{6.1}$$

Demonstração: Deixamos a demonstração da primeira afirmação da continuidade de g como exercício.

Se g é diferenciável e g' é dada por (6.1), então g' é contínua porque a primeira afirmação se aplica a ϕ_t. Logo, basta mostrar que o lado direito de Equação (6.1) é a derivada de g, isto é, para todo t_0 em $[c,d]$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$g(t_0+h) - g(t_0) = \left[\int_a^b \phi_t(s,t_0)\,\mathrm{d}s\right] \cdot h + \mathrm{R}(h) \tag{$*$}$$

com $|\mathrm{R}(h)| < \epsilon|h|$ para todo h com $|h| < \delta$. Ora ϕ é diferenciável ao fixar o seu primeiro argumento, isto é, para todo t_0 em $[c,d]$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(t_0+h) - \phi(t_0) = \phi_t(t_0)h + r(h)$$

com $|r(h)| < \epsilon|h|$ para todo h com $|h| < \delta$. Pela linearidade da integral

$$\begin{aligned} g(t_0+h) - g(t_0) &= \int_a^b \phi(s,t_0+h) - \phi(s,t_0)\,\mathrm{d}s \\ &= \left[\int_a^b \phi_t(s,t_0)\,\mathrm{d}s\right] \cdot h + \left[\int_a^b r(h)\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

Como $\left|\int_a^b r(h)\,\mathrm{d}s\right| \leq |b-a|\epsilon|h|$, concluímos $(*)$. □

A integral de $\frac{1}{z}$ sobre um círculo é pelo Teorema Fundamental do Cálculo dada pela diferença de dois ramos do logaritmo no mesmo ponto, logo, por um múltiplo de $2\pi i$; calculemo-la:

Teorema 6.2. *Para todo z em $\mathbb{C}$ com $|z| < 1$,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} = 2\pi. \tag{6.2}$$

Demonstração: Define $\phi\colon [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ por

$$\phi\colon s,t \mapsto \frac{e^{is}}{e^{is} - tz}$$

e $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ pelo cálculo da média de ϕ no primeiro argumento

$$g = \int_0^{2\pi} \phi(s,\cdot)\,\mathrm{d}s.$$

Logo, (6.2) é $g(1) = 2\pi$. Para deduzir $g(1) = 2\pi$, mostremos $g(0) = 2\pi$ e $g' = 0$, logo g é constante:

Como $\phi(\cdot,0) \equiv 1$, obtemos $g(0) = 2\pi$.

Temos

$$\phi_t(s,t) = \phi(s,\cdot)'(t) = \Phi(\cdot,t)'(s) = \Phi_s(s,t) \quad \text{onde } \Phi\colon s,t \mapsto iz(e^{is} - tz)^{-1}.$$

Logo

$$g' = \int_0^{2\pi} \Phi_s(s,\cdot)\,\mathrm{d}s \equiv \Phi(2\pi,\cdot) - \Phi(0,\cdot) = 0.$$

Observemos que Teorema 6.2 é o caso $f = \mathrm{id}$ da proposição seguinte:

Proposição 6.3. *Seja G um subconjunto aberto em $\mathbb{C}$, seja a em G e $\bar{B}(a;r)$ uma bola fechada à volta de a dentro de G. Seja $f\colon G \to \mathbb{C}$ e $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ o círculo da bola dado por $\gamma\colon t \mapsto a + re^{it}$. Se f é continuamente diferenciável, então, para todo z com $|z - a| < r$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w. \tag{6.3}$$

Demonstração: Seja $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a transformação afim $z \mapsto rz + a$; em particular, é invertível, e temos $T^{-1}\bar{B}(a;r) = \bar{B}(0;1)$. Como T e T^{-1} são continuamente diferenciáveis, $f \circ T\colon T^{-1}\bar{B}(a;r) \to \mathbb{C}$ é continuamente diferenciável se, e tão-somente se, f é continuamente diferenciável. Logo, como a afirmação vale para todas as funções continuamente) diferenciáveis, podemos supor $\bar{B}(a;r) = \bar{B}(0;1)$.

Pela definição da integral ao longo de um caminho,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z}\,\mathrm{d}s$$

e (6.3) equivale a

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int 0^{2\pi}\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z}\,\mathrm{d}s - 2\pi f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int 0^{2\pi}\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)\,\mathrm{d}s. \qquad (*)$$

Em analogia a demonstração do Teorema 6.2, define $\phi\colon [0,2\pi]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ por

$$\phi\colon s,t \mapsto \frac{f(z+t(e^{is}-z))e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)$$

e $g\colon [0,1]\to\mathbb{C}$ pelo cálculo da média de ϕ no primeiro argumento

$$g = \int_0^{2\pi} \phi(s,\cdot)\,\mathrm{d}s.$$

Logo, $(*)$ é $g(1) = 0$. Para deduzir $g(1) = 0$, mostremos $g(0) = 0$ e $g' = 0$, logo g é constante:

Como $\int_0^{2\pi}\phi(\cdot,0)\,\mathrm{d}s = 2\pi f(z)$ pelo Teorema 6.2, obtemos $g(0) = 0$.

Temos, para $t \le 1$ *positivo*,

$$\phi_t(s,t) = \phi(s,\cdot)'(t) = \Phi(\cdot,t)'(s) = \Phi_s(s,t) \qquad \text{onde } \Phi\colon s,t \mapsto it^{-1}f(z+t(e^{is}-z))$$

Logo, para $t \le 1$ *positivo*,

$$g' = \int_0^{2\pi}\Phi_s(s,\cdot)\,\mathrm{d}s \equiv \Phi(2\pi,\cdot) - \Phi(0,\cdot) = 0.$$

Logo, como g' é contínua, obtemos também no limite $g'(0) = 0$; isto é, g é constante. □

Queremos expandir f como série de potências: A este fim, observemos que, para w no círculo da bola $B(a;r)$ e z no seu interior, isto é, $|z-a| < |w-a|$, o fator no integrando

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Para tomar este limite pelas integrais em vez do integrando, observemos:

Lema 6.4. *Seja γ um caminho retificável em $\mathbb{C}$ e $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ e F funções contínuas sobre $\{\gamma\}$ (com valores complexos). Se $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ uniformemente, então*

$$\int_\gamma \mathrm{F}_n \to \int_\gamma \mathrm{F}.$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Para N tal que $\|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\|_{\sup} < \epsilon$ sobre o conjunto compacto $\{\gamma\}$, obtemos

$$\left|\int_\gamma \mathrm{F} - \int_\gamma \mathrm{F}_n\right| = \left|\int_\gamma \mathrm{F} - \mathrm{F}_n\right| \leq \int_\gamma |\mathrm{F} - \mathrm{F}_n|(z)|dz| \leq \epsilon.$$

Enquanto a integral de Riemann comuta com o limite *uniforme* de funções, frequentemente seria conveniente se comute com o limite *pontual*; isto levou à criação da *integral de Lebesgue* que em vez de particionar o domínio do integrando como a integral de Riemann, particiona a sua imagem.

Teorema 6.5. *Seja f definida sobre a bola aberta $\mathrm{B}(a;\mathrm{R})$ à volta de a em $\mathbb{C}$. Se f continuamente diferenciável, então*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n \quad \textit{com } a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Demonstração: Seja $\bar{\mathrm{B}}(a;r) \subseteq \mathrm{B}(a;\mathrm{R})$ uma bola fechada e γ o caminho que percorre o seu círculo. Por (6.3), para z em $\bar{\mathrm{B}}(a;r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Temos

$$\left|\frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right| = \frac{|f(w)||z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{\mathrm{M}}{r}\left(\frac{|z-a|^n}{r}\right)^n$$

onde $\mathrm{M} = \sup\{|f(w)| : |w-a| = r\}$ é o supremo de f no círculo. Como $\frac{|z-a|}{r} < 1$, pelo Teste de Weierstrass, Teorema 2.92, a série de funções

$$\sum_n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(\cdot - a)^n$$

converge uniformemente sobre $\{\gamma\}$. Pelo Lema 6.4 e a discussão antecedente,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right](\cdot - a)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n(\cdot - a)^n \quad \text{com } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Por Proposição 4.13.(iii),

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

isto é, a_n é independente do caminho γ, isto é, do raio r. Logo

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n (\cdot - a)^n$$

sobre $B(a; R)$. □

A. Construção dos números complexos

A.1. Frações

Um elemento x em um anel A é uma *unidade*, ou *invertível*, se existe y, denotado por $y = x^{-1}$, tal que $xy = 1$. Um *corpo* é um anel em que todo elemento é invertível.

Seja A um anel comutativo sem divisores de 0, isto é, não existem x e y diferentes de 0 em A tais que $xy = 0$. Por exemplo, além dos corpos, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_p$ são tais anéis.

O *corpo das frações* Q de um tal A é o *menor* corpo que contém A (isto é, existe $A \to Q$ e, para qualquer outro corpo R com $A \to R$, existe $Q \to A$ que a fatore, isto é, tal que $A \to R = A \to Q \to R$).

Ele é construído como conjunto por

$$Q = A \times A/\sim$$

onde duas "frações" (x', y') e (x'', y'') são equivalentes se uma se simplifica a outra, isto é, $(x', y') \sim (x'', y'')$ se existe a em A tal que $a(x', y') = (ax', ay') = (x'', y'')$. A classe de equivalência de (x, y) em Q é denotada por x/y. Como anel, a adição e multiplicação é a de A em cada coordenada.

Definição. Seja

$$\mathbb{Q} := \text{ corpo das frações de } \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad |x/y|_p := |x|/|y|.$$

A.2. Completamento

Em $\mathbb{R}$, uma expansão decimal $a_0 + a_1 10^{-1} + \cdots$ com a_0, a_1, ... em $\{0, 1, \ldots, 9\}$ converge com respeito ao valor absoluto usual $|\cdot|$.

Seja A um anel. Um *valor absoluto* (restrito) em A é uma aplicação $|\cdot| \colon A \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tal que

- (Hausdorff) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,
- (Multiplicatividade) $|xy| = |x||y|$, e
- (Desigualdade Triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ao invés de valor absoluto, usa-se também o termo *norma*. Chamamos um anel munido de uma tal norma de anel *normado*.

Definição. Seja X um conjunto. Uma aplicação $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ é uma função de *distância* ou *métrica* se

- $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,
- $d(x,y) = d(y,x)$, e
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Um *espaço métrico* é um par (X, d) de um conjunto X e uma função distância d como acima.

Uma aplicação f entre espaços métricos é *uniformemente contínua* se

$$\text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } \ d(x,y) < \delta \text{ implica } \ d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Como as aplicações que respeitam a estrutura entre espaços topológicos são as aplicações *contínuas* e entre espaços vetoriais as aplicações *lineares*, aqui, entre espaços métricos, supomos todas as aplicações *uniformemente contínuas.*

Se $|\cdot|$ é uma norma sobre um anel, então

$$d(x,y) := |x - y|$$

é uma função distância.

Definição. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico é dita de *Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos os $n, m > N$. Um espaço métrico é *completo* se toda sequência de Cauchy converge.

Em particular, toda sequência que converge é Cauchy.

Teorema A.1 (Completamento). *Para todo espaço métrico* X *existe um (único) espaço métrico completo* $\widehat{X}$ *com uma aplicação (uniformemente contínua)* $X \to \widehat{X}$ *tais que para qualquer espaço métrico completo* Y *com uma aplicação (uniformemente contínua)* $X \to Y$*, existe uma aplicação (uniformemente contínua)* $\widehat{X} \to Y$ *que a fatora, isto é*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ \widehat{X} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demonstração: Definimos o conjunto

$$\widehat{X} := \{ \text{ sequências de Cauchy em X } \}/\sim$$

(e no qual X se injeta pelas sequências constantes) onde a relação de equivalência $\sim$ é definida por $(x_n) \sim (y_n)$ se $d(x_n, y_n) \to 0$. A função distância $\hat{d}$ é definida por

$$\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \lim d(x_n, y_n)$$

para representantes (x_n) e (y_n) das classes de equivalência $[(x_n)]$ e $[(y_n)]$. Observe que é bem-definida, isto é, independente dos representantes das classes de equivalência. Se (x_n) é uma sequência de Cauchy (de classes de equivalência de sequências de Cauchy) com $x_n = [(x_{n,m} : m \in \mathbb{N})]$, então ela converge a sequência diagonal $x = (x_{n,n} : n \in \mathbb{N})$. (O leitor é convidado a convencer-se da existência da aplicação $\widehat{X} \to Y$.) □

Observação. Uma abordagem a construir o espaço métrico $\mathbb{R}$ é como completamento de $\mathbb{Q}$ para a função distância usual: Se completamos $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, observamos que

- a função distância tem imagem em $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, e
- a função distância sobre $\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{Q}}$ precisa de ser definida, como ainda não construímos $\mathbb{R}$, por

  $$\hat{d}([(x_n)], [(y_n)]) := [(d(x_n, y_n))].$$

  Observe que $[(d(x_n, y_n))] = \lim d(x_n, y_n)$ pela definição do limite como sequência diagonal (dos representantes) das sequências constantes cujas entradas todas são $d(x_n, y_n)$.

Revela-se por construção

- que a aplicação $X \to \widehat{X}$ é injetora, e
- que X é *denso* em $\widehat{X}$; isto é, para todo $\hat{x}$ em $\widehat{X}$ existem x_1, x_2, ... em X tal que $x_1, x_2, \ldots \to \hat{x}$, ou
  - mais formalmente: para qualquer $\epsilon > 0$ e $\hat{x}$ em $\widehat{X}$ existe x em X tal que $d(\hat{x}, x) < \epsilon$;
  - informalmente: todos os elementos no completamento são limites do espaço completado.

Demonstração:

- Sejam x e y em X e $(x_n) = (x, x, \ldots)$ e $(y_n) = (y, y, \ldots)$ representantes dos seus valores sob $X \to \widehat{X}$. Vale $(x_n) = (y_n)$ se, e tão-somente se, $\hat{d}((x_n), (y_n)) = d(x, y) = 0$, isto é, $x = y$.

- Dado $\epsilon > 0$ e $\bar{x}$ em $\widehat{X}$ representado por uma sequência de Cauchy $x = (x_n)$ em X, escolhe N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos os $n, nm > N$. Seja $y := (x_N, x_N, \ldots)$ a sequência constante e $\bar{y}$ a sua classe residual em $\widehat{X}$. Logo,

$$\hat{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_n d(x_n, y) = \lim_n d(x_n, x_N) \leq \max\{d(x_m, x_N) : m \geq N\} < \epsilon.$$

Observação (ou digressão para o dia-a-dia do matemático). A construção do completamento $\widehat{X}$ para X, como a de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para m em $\mathbb{N}$ (como a de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$), é uma construção *universal* por classes residuais. No final só importa

- que $\widehat{X}$ seja o "menor" espaço métrico em que toda sequência de Cauchy converge, e

- que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ seja o "menor" anel em que $m(= 1 + \cdots + 1) = 0$, e

- que $\mathbb{Q}$ seja o "menor" anel em que todo número inteiro é invertível.

Basta-nos saber que todos os limites de sequências que convergem já estão em $\widehat{X}$. A construção é teoricamente importante, mas, uma vez feita, é praticamente deixada de lado. (Como ninguém pensa em uma classe residual de números racionais ao ver um número real.)

A.3. Extensão Algébrica

Um elemento α na extensão E de um corpo F é *algébrico* se existe $P(X) \in F[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$. Entre todos os tais P com $P(\alpha) = 0$ existe um único polinômio $M(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ de grau mínimo e cujo coeficiente dominante é igual a 1, o ***polinômio mínimo*** de α. A extensão E de um corpo F é ***algébrica*** se todo elemento é algébrico; equivalentemente, se é gerada por elementos algébricos. Em particular, E é uma extensão algébrica finitamente gerada de F, se, e tão-somente se, o espaço vetorial E tem dimensão finita sobre F; chamemos uma tal extensão de extensão *finita* e denote $[E : F] = \dim_F E$.

Proposição A.2. *Seja* E *uma extensão algébrica de* F. *Se é gerada por um elemento* α *com polinômio mínimo* M, *então*

$$F[X]/MF[X] \xrightarrow{\sim} E$$

com $X \mapsto \alpha$.

Demonstração: É sobrejetor porque a imagem contém F e α. O núcleo do homomorfismo $F[X] \to E$ é um ideal que anula α. É principal, porque $F[X]$ é euclidiano pela divisão com resto; por definição o núcleo gerado é por M □

Observação. Temos

$$F \oplus F \cdot X \oplus \cdots \oplus F \cdot X^{m-1} \xrightarrow{\sim} F[X]/MF[X]$$

onde m = grau de M.

Demonstração: É injetor porque $m - 1 < m$ = grau de M. E sobrejetor porque pela divisão com resto todo polinómio P se escreve como

$$P = QM + R$$

com grau de $R < m$ = grau de M. □

Seja $F = \mathbb{R}$ e $M = X^2 + 1$. É irredutível, porque, pela divisão com resto, M é redutível se, e tão-somente se, tem zero.

Definição A.3. Seja

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)\mathbb{R}[X].$$

Pela observação, $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}X$. Denote X por i, da forma que i é uma solução de $X^2 + 1$, isto é, $i^2 = -1$.

Define uma norma $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ pela identificação de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ como espaço vetorial bidimensional; isto é, $|x + iy| = x^2 + y^2$.

Existe um único homomorfismo não-trivial da álgebra $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ dada pela conjugação

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy.$$

B. Topologia

Seja X um conjunto. Uma *topologia* sobre X é uma família τ de subconjuntos de X tal que

- os conjuntos $\emptyset$ e X são em τ,
- se U e V em τ, então $U \cap V$ em τ, e
- se $\{U_i : i \in I\}$ (para qualquer conjunto I) é em τ, então $\bigcup_{i \in I} U_i$ é em τ.

Exemplo.

- A topologia *discreta* sobre X é $\tau = \{$ todos os subconjuntos de X$\}$, e
- a topologia *mínima*, a menor topologia possível, é $\tau = \{\emptyset, X\}$.
- Seja X um conjunto. Uma aplicação $d \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma função *distância* ou *métrica* se
  - $d(x,y) = 0$ se, e tão somente se, $x = y$, (Hausdorff)
  - $d(x,y) = d(y,x)$, e (simetria)
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. (desigualdade triangular)

  Um *espaço métrico* é um par (X, d) de um conjunto X e uma função distância d como acima.

  Para x em X e $r > 0$, defina a *bola aberta* respectivamente *fechada* com *raio* r e *centro* x (ou *à volta de* x) por

  $$B(x;r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) < r\} \quad \text{e} \quad \bar{B}(x;r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Uma *vizinhança à volta de um ponto* x em um espaço topológico X é um conjunto de X que contém um conjunto aberto U que contém x. Por exemplo, se X é um espaço métrico, então uma bola é uma vizinhança à volta do seu centro.

Uma *base* em um ponto x em X é uma família $\{U_i : i \in I\}$ de conjuntos abertos que contêm x tal que

$$\{\bigcup_{j \in J} U_j : J \subseteq I\} = \{U \text{ em } \tau : U \ni x\}.$$

Por exemplo, as bolas à volta de um ponto x em um espaço métrico X constituem uma base.

Um grupo é *topológico* se as suas operações $\cdot$ e $\cdot^{-1}$ são contínuas. Se $X = G$ é um grupo topológico, então basta por esta continuidade definir uma base $\{U_i : i \in I\}$ em volta de 1, o elemento neutro de G para obter τ inteira: A família τ_1 das uniões arbitrárias de $\{U_i : i \in I\}$ é à família de todos os conjuntos abertos que contêm 1. Seja g em G um ponto arbitrário. Como o traslado $g\cdot$ é contínuo e invertível, $g\mathscr{B}_1 = \tau_g$ onde τ_g é a família de todos os conjuntos que contêm g. Como $\tau = \bigcup_{g \in G} \tau_g$, concluímos que τ foi inteiramente restituída por $\mathscr{B}$.

Uma topologia é *totalmente desconexa* se todo subconjunto é *desconexo*, isto é, é união disjunta de dois subconjunto abertos. Por exemplo, $\mathbb{Z}_p$ é totalmente desconexo.

B.1. Sequências e Completude

Definição B.1. Uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em X *converge ao limite* x se para toda vizinhança U à volta de x existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Isto é, *quase todos* os membros (= todos exceto um número finito) de (x_n) estão em U. Denote $\lim x_n = x$ ou $x_n \to x$ que (x_n) converge a x.

Observe que $x_n \to x$ se, e tão somente se, $d(x_n, x) \to 0$.

Se X é *Hausdorff*, isto é, dois pontos diferentes são sempre contidos em duas vizinhanças disjuntas, então o limite é único.

Exemplo B.2 (Juros compostos). Ponhamos o nosso dinheiro em uma conta de poupança de um banco generoso, 100 reais por 100 dias com uma taxa de juros de 100%. Logo, teremos após 100 dias 200 reais na conta.

Agora proponhamos ao banco, no lugar de 100% uma única vez, pague 10% dez vezes, isto é após cada décimo dia um décimo dos juros. Logo, teremos

- após 10 dias $110 = 100 \cdot (1{,}1)$ reais na conta,
- após 20 dias $110 \cdot (1{,}10) = 121 = 100 \cdot (1{,}1)^2$ reais na conta, ... e
- finalmente, após 100 dias $100 \cdot (1{,}1)^{10} = 100 \cdot 2{,}5937424601 \approx 259$ no lugar de 200 reais na conta!

Tornamo-nos arbitrariamente ricos, ao diminuirmos os intervalos de pagamento mais e mais? Não! Se o banco pagasse, por exemplo, os juros (compostos) em 1.000.000 de intervalos, isto é, quase cada segundo, teríamos

$$100 \cdot (1{,}0000001^{1.000.000}) \approx 100 \cdot 2{,}71828 = 271{,}828$$

reais na conta. Isto é, observamos que a sequência $(1 + 1/n)^n$ converge ao *número de Euler* $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$!

Um ponto x em X é um *ponto de acumulação* (ou *ponto de limite*) se é o limite de uma sequência (x_n)

- cujos membros x_n são todos diferentes, ou
- equivalentemente, tal que $\{x_n\}$ é infinito, ou
- equivalentemente, tal que $x \notin \{x_n\}$.

Um ponto x não é um ponto de acumulação, é um *ponto isolado*, se o conjunto unitário $\{x\}$ é aberto.

B.2. Funções Contínuas

Sejam X e Ω espaços topológicos e $f\colon X \to \Omega$. Seja a em X e ω em Ω.

Definição B.3. A função f *tem limite* ω em a, denotado por $\lim_{x\to a} f(x) = \omega$, se para toda vizinhança V à volta de ω em Ω existe uma vizinhança U à volta de a em X tal que $f^{-1}(V) \supseteq U$.

Ela é *contínua em a* se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ela é *contínua* se é contínua em todos os pontos.

Observemos que a primeira condição $\lim_{x\to a} f(x) = \omega$ não é vazia se, e tão somente se, a é ponto de acumulação.

Exemplo B.4.

- Todas as operações aritméticas + e $\cdot$, $-$ e $\cdot^{-1}$ são contínuas.
- Toda função linear sobre um espaço vetorial finito é contínua.
- Todo polinómio é contínuo.
- Todas as funções especiais como exp, log, sin, cos, tan, arctan ...

Proposição B.5. *Sejam* X *e* Ω *espaços topológicos e* $f\colon X \to \Omega$. *Seja* a *em* X *e* $\alpha = f(a)$ *em* Ω. *São equivalentes as seguintes condições:*

(i) *A função f é contínua em a.*

(ii) *Para toda sequência (x_n), se $x_n \to a$, então $f(x_n) \to \alpha$.*

Demonstração: (i) $\implies$ (ii): Seja O em Ω uma vizinhança em torno de α. Pela hipótese, existe uma vizinhança B em torno de x contida em $f^{-1}O$. Como $x_n \to x$, esta vizinhança B contém quase todos (isto é, todos exceto um número finito) membros de (x_n). Logo O contém quase todos os membros de $(f(x_n))$; isto é, $f(x_n) \to f(x) = \alpha$.

(ii) $\implies$ (i): Por contraposição: Seja a em X e, para todo $n \in \mathbb{N}$, seja V_n uma vizinhança de $f(a)$ tal que, para toda vizinhança U de a, existe x_n em X tal que x em U e $f(x) \notin V_n$. Logo $x_n \to a$, mas $f(x_n) \not\to f(a)$. □

Proposição B.6. *Sejam* X *e* Ω *espaços topológicos e* $f : X \to \Omega$. *São equivalentes as seguintes condições:*

(i) *A função f é contínua.*

(ii) *A pré-imagem sob f de todo subconjunto aberto é aberta.*

(iii) *A pré-imagem sob f de todo subconjunto fechado é fechada.*

Demonstração: Por definição, um conjunto G é aberto, se, e tão somente se, para todo g em G existe uma bola em torno de g. Pela Proposição B.5, uma função f é contínua se, e tão somente se, a pré-imagem de toda vizinhança O em Ω contém uma vizinhança B em X à volta de x.

(i) $\implies$ (ii): Se f é contínua e Δ é um subconjunto aberto em Ω , então, para todo x em $D = f^{-1}\Delta$, existe uma vizinhança B em X à volta de x; isto é, D é aberto.

(ii) $\implies$ (i): Se O uma vizinhança em Ω, então $f^{-1}O$ é aberto, em particular, contém uma vizinhança B em X à volta de x.

(ii) $\iff$ (iii): A pré-imagem de um complemento é o complemento da pré-imagem. □

B.3. Compacidade

Definição. Seja K um subconjunto de X. Uma *cobertura* de K é uma família de subconjuntos abertos

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

de X tal que a sua união contenha K, isto é

$$\bigcup \mathcal{U} \supseteq K.$$

O espaço K é *compacto* se toda cobertura $\mathcal{U}$ de K tem um *refinamento finito*; isto é, se contém uma subcobertura finita de K; isto é, existem $U_1, \ldots, U_n$ em $\mathcal{U}$ tal que $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$.

O fecho $\bar{S}$ de um conjunto S em X é o menor conjunto fechado que contém S, isto é,

$$\bar{S} = \bigcap \{ \text{ todos os conjuntos fechados F que contêm S} \}.$$

O espaço X é *localmente compacto* se todo ponto x tem uma vizinhança U tal que o seu fecho $\bar{U}$ é compacto.

Exemplo B.7.

- Todos os conjuntos finitos são compactos
- a bola unitária aberta $B(0,1)$ não é compacto em $\mathbb{R}$: a cobertura $B(0,1-\frac{1}{n})$ contém nenhuma subcobertura finita.

Proposição B.8. *Seja* K *um subconjunto de* X.

(i) *Se* K *é compacto, então é fechado.*

(ii) *Se* K *é compacto, então é* limitado*, isto é, contido em uma bola.*

(iii) *Se* F *é fechado e* $F \subseteq K$*, então* F *é compacto.*

Demonstração: Ad (i): Mostremos que $K = K^-$ por contraposição: Seja $K \neq K^-$, isto é, exista $x \in K^- - K$, e mostremos que K não é compacto, isto é, existe uma cobertura $\mathcal{C}$ de K tal que $K \not\subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$ para quaisquer $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{C}$. Seja

$$\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{com } C_n := X - \bar{B}(x, \frac{1}{n})$$

uma cobertura de K.

Como $x \in K^-$, pela Proposição 2.10.(vi), toda bola em torno de x intersecta K. Em particular, toda bola da forma $\bar{B}(x, \frac{1}{n})$ intersecta K; equivalentemente, nenhum conjunto $C_n = X - \bar{B}(x, \frac{1}{n})$ em $\mathcal{C}$ contém K.

Como $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$, a união de toda coleção finita $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_n}\}$ de $\mathcal{C}$ é contida em C_I para $i = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$. Logo, nenhuma coleção finita de $\mathcal{C}$ cobre K.

Ad (ii): Por contraposição: Se K é ilimitado, isto é, contido em nenhuma bola $B(0,n)$ para n em $\mathbb{N}$, então $\mathcal{C} = \{B(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura de K sem refinamento finito.

Ad (iii): Seja K compacto e F em K um subconjunto fechado. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura de F. Logo $\mathscr{D} = \mathscr{C} \cup \{X - F\}$ é uma cobertura de K; Como K é compacto, existe uma subcobertura finita de $\mathscr{D}$; logo uma subcobertura de $\mathscr{D}$ finita de F. □

Observação B.9. Todo subconjunto compacto é fechado e limitado; porém, a implicação inversa não vale em geral, isto é, existe um espaço métrico com um subconjunto limitado e fechado que não é compacto!

Por exemplo, seja $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ o espaço vetorial das sequências cujas entradas reais são quase todas nulas (= todas, exceto um número finito) e a sua norma dada por $\|(a_n)\| := \max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$; em particular, $\|\cdot\|$ induz a métrica $d(a,b) = \|a - b\|$. Seja $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ a base canónica de V dada por e_n = a sequência cuja única entrada não-nula é a n-ésima com valor 1. O conjunto B é limitada e, como $d(e_n, e_m) = 1$ se (e tão somente se) $n \neq m$, ele tem nenhum ponto de acumulação, logo é fechado. Porém, a cobertura de B dada pela coleção

$$\{B(e_n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$$

não tem refinamento finito porque $B(e_n, 1) \cap B = \{e_n\}$.

Contudo, o Teorema de Heine-Borel abaixo mostrará que para $X = \mathbb{R}$ (e os seus produtos finitos), a implicação inversa vale: todo subconjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}$ (e nos seus produtos finitos) é compacto.

Formulado por conjuntos fechados ao invés de abertos, um espaço X é compacto se, e tão somente se, para toda família $\mathscr{F}$ de subconjuntos fechados, se todas as suas interseções finitas (ou equivalentes, todas as interseções entre dois subconjuntos em $\mathscr{F}$) são não-vazias, então a interseção total $\bigcap \mathscr{F}$ é não-vazia.

Uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um espaço métrico X tem a *Propriedade de Interseções Finitas* ou a *PIF*, se para todos $C_1, \ldots, C_n$ em $\mathscr{C}$ temos $C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$. Por exemplo, a coleção dos conjuntos $X - B(0, \frac{1}{n})$ para n em $\mathbb{N}$ tem a PIF.

Proposição B.10. *Um subconjunto* K *em* X *é compacto se, e tão somente se, para toda coleção* $\mathscr{C}$ *de subconjuntos fechados em* K*, se* $\mathscr{C}$ *tem a PIF, então* $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$.

Isto é, se a interseção entre todos os conjuntos de uma coleção $\mathscr{C}$ *de subconjuntos fechados em* K *é vazia, então já a interseção entre um número finito de conjuntos em* $\mathscr{C}$ *é vazia.*

Demonstração: Seja $\mathscr{F}$ uma coleção de subconjuntos em X tal que: Se $\mathscr{F}$ tem a PIF, então $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$; ou equivalentemente, por contraposição: Se $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$, então há um número finito de conjuntos em $\mathscr{F}$ cuja interseção é vazia; ou equivalentemente, para a coleção dos complementos $\mathscr{C} = \{X - F : F \in \mathscr{F}\}$: Se $\bigcup \mathscr{C} = X$, então há um número finito de conjuntos em $\mathscr{C}$ cuja união é X.

Concluímos em particular que toda coleção de subconjuntos fechados em X tem a PIF se, e tão somente se, X é compacto.

Todo subconjunto K em X é compacto se, e tão somente se, é relativamente compacto, isto é, toda cobertura de conjuntos *abertos em* K, isto é, de conjuntos da forma $U \cap K$ para U um subconjunto aberto em X, tem um refinamento finito. Equivalentemente, se, e tão somente se, toda coleção $\mathscr{F}$ de conjuntos *fechados em* K, isto é, de conjuntos da forma $K \cap F$ para F fechado em X, tem a PIF.

Se K é compacto, então é fechado pela Proposição B.8. Logo um conjunto é relativamente fechado, isto é, fechado em K se, e tão somente se, é fechado em X. Concluímos que toda coleção de subconjuntos fechados em K tem a PIF se, e tão somente se, K é compacto. □

Teorema B.11 (Tychonoff). *Seja* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *uma família (de cardinalidade arbitrária) de espaços topológicos. Se todos os* X_α *são compactos, então o seu produto* $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *é compacto.*

Demonstração: Usemos a caracterização da compacidade pelos subconjuntos fechados, isto é, dada uma família $\mathscr{F}$ de subconjuntos fechados em X, se as suas interseções finitas são não-vazias, então a interseção total $\bigcap \mathscr{F}$ é não-vazia:

Seja $\mathscr{F}$ uma tal família de subconjuntos fechados em X que tem a PIF (= Propriedade das Interseções Finitas), isto é, cujas interseções finitas todas são não-vazias. O conjunto das famílias de subconjuntos (não necessariamente fechados) em X que têm a PIF, ordenado por inclusão, satisfaz a condição do Lema de Zorn; logo existe uma família máxima $\mathscr{F}^* \supseteq \mathscr{F}$.

Observação: Por $\mathscr{F}^*$ ser máxima, se G é um subconjunto de X tal que $G \cap F \neq \emptyset$ para todo F em $\mathscr{F}^*$, então G em $\mathscr{F}^*$. Em particular, dados $F_1, \ldots, F_n$ em $\mathscr{F}^*$, não apenas $F := F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$, mas F em $\mathscr{F}^*$. (Isto é, $\mathscr{F}^*$ é fechada sob interseções finitas.)

Para uma coordenada $\alpha \in A$ denote $p_\alpha : X \to X_\alpha$ a projeção. Como $\mathscr{F}^*$ tem a PIF, também a família $\mathscr{F}^*_\alpha := \{p_\alpha(F) : F \in \mathscr{F}^*\}$ das suas projeções tem a PIF. Por X_α ser compacto, a interseção total $I_\alpha = \bigcap\{\overline{F_\alpha} : F_\alpha \in \mathscr{F}^*_\alpha\}$ dos seus fechamentos é não-vazia. Seja, pelo axioma de escolha, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$.

Temos x em $\prod_{\alpha \in A} \bigcap \mathscr{F}^*_\alpha \supseteq \bigcap \mathscr{F}^*$; para completar a demonstração, precisa de demonstrar que x já é em cada F em $\mathscr{F}$. Basta mostrar que toda vizinhança à volta de x contém um conjunto que é contida em $\mathscr{F}^*$: Pela PIF todo F em $\mathscr{F}^*$

intersecta todo conjunto de $\mathcal{F}^*$; em particular, toda vizinhança de x, logo o seu fecho $\overline{F}$ contém x. Em particular, todo F em $\mathcal{F}$, sendo fechado, contém x.

Seja $V \ni x$ aberto. Por definição da topologia do produto, existe um número finito de subconjuntos abertos $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ de $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n}$ tais que que

$$U := U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n} X_\alpha$$

contém x e é contido em V. Como $U \subseteq V$, basta demonstrar que U em $\mathcal{F}^*$. Como

$$U = p_{\alpha_1}^{-1} U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1} U_{\alpha_n}$$

basta, pela observação acima que $\mathcal{F}^*$ é fechada sob interseções finitas, demonstrar que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ em $\mathcal{F}^*$ para todo conjunto aberto U_α e α em A. Pela observação acima, basta demonstrar que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap F \neq \emptyset$ para todo F em $\mathcal{F}^*$. Como x_α em $I_\alpha \subseteq \overline{p_\alpha(F)}$ e em U_α, em particular, $F \cap p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$. □

O Teorema de Tychonoff, em geral, equivale ao Axioma da Escolha. Se os fatores são *Hausdorff*, isto é, cada sequência que converge tem um único limite, por exemplo, espaços métricos, então não precisa dele.

B.4. Compacidade Sequencial

Um subconjunto de um espaço topológico é *denso* se intersecta todo subconjunto aberto. Um espaço topológico é *separável* se tem um subconjunto enumerável denso. Um espaço topológico é *sequencialmente compacto* se toda sequência tem uma subsequência convergente.

Exemplo B.12. Nem todo espaço (topológico) compacto é sequencialmente compacto: Por exemplo, a bola unitária do dual $c^b(\mathbb{N})^*$ é compacta para a topologia fraca* pelo Teorema de Alaoglu. Porém, a sequência $([f \mapsto f(n)] : n \in \mathbb{N})$ tem nenhuma subsequência convergente.

Contudo, um espaço métrico é compacto se, e tão somente se, é topologicamente compacto:

Teorema B.13. *Se* X *é um espaço métrico, então* X *é sequencialmente compacto se, e tão somente se,* X *é compacto.*

Demonstração: Mostremos a implicação $\Longleftarrow$ por contraposição, isto é, se não é sequencialmente compacto, então não é compacto: Seja (x_n) tal que nenhuma subsequência converge, isto é, para todo x em X existe $\epsilon(x) > 0$ tal que $B(x, \epsilon(x)) \cap \{x_n\}$ é finita. Se a cobertura $\{B(x, \epsilon(x)) : x \in X\}$ tivesse um refinamento finito, então (x_n) seria finita, em particular, convergente; em contradição ao que nenhuma subsequência converge. Logo X não é compacto.

Mostremos a implicação $\implies$ em três passos:

(i) *Lema do Número da Cobertura de Lebesgue*: Para toda cobertura $\{U_i\}$ existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo x em X, existe i tal que $B(x, \epsilon) \subseteq U_i$.

(ii) *Cota Total*: Para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura finita de X por bolas $B(x, \epsilon)$.

(iii) O espaço topológico X é compacto.

Ad (i): Por contraposição: Se existe uma cobertura $\{U_i\}$ tal que, para todo n, existe x_n em X tal que $B(x_n, 1/n)$ é contida em nenhum U_i, então (x_n) tem nenhuma subsequência convergente: Se (x_n) tivesse uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$, então

- existe $\epsilon > 0$ e i_0 tal que $B(x, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$, e
- existe N tal que x_{n_k} em $B(x, \epsilon)$ para todo $n_k \geq N$.

Logo, existe k suficientemente grande tal que $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq U_{i_0}$; em contradição à escolha de x_{n_k}!

Ad (ii): Por contraposição: Se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n e $a_1, \ldots, a_n$ em X existe

$$a \notin B(a_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(a_n, \epsilon),$$

então define a sequência (x_n) por uma escolha arbitrária de x_1 e a escolha de

$$x_{n+1} \notin B(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon).$$

Se (x_n) tivesse uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to x$, então existiria para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ um N tal que x_{n_k} em $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ para todo $n_k \geq N$. Logo, $d(x_{n_k}, x_N) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_N) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, isto é,

$$x_{n_k} \in B(x_N, \epsilon)$$

para todo $n_k > N$; em contradição à escolha de x_{n_k} para $n_k > N$!

Ad (iii): Seja $\{U_i\}$ uma cobertura de X. Seja $\epsilon > 0$ dado por (i) e $x_1, \ldots, x_n$ por (ii). Logo o refinamento dado pelos $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ que contêm respetivamente $x_1, \ldots, x_n$ cobre X. □

Lema B.14. *Toda sequência infinita em $\mathbb{R}$ tem uma subsequência monótona infinita.*

Demonstração: Um índice n é um *pico* se $x_n > x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$. Se tem uma infinitude de picos $n_1, n_2, \ldots$, então $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, é uma subsequência monotonamente decrescente. Caso contrário, seja n_0 o último pico. Isto é, para todo $n > n_0$ existe $m > n$ com $x_m \geq x_n$. Seja $n_1 = n_0+1$; logo, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geq x_{n_1}$; semelhantemente para n_2 no lugar de n_1, e assim por diante se constrói uma subsequência (x_{n_k}) monotonamente crescente. □

Lema B.15. *Toda sequência real monótona e limitada converge; caso crescente ao seu supremo, caso decrescente ao seu ínfimo.*

Demonstração: Seja (x_n) monotonamente crescente e limitada. Seja $s = \sup\{x_n\}$ e $\epsilon > 0$. Logo existe N tal que $|s - x_N| < \epsilon$. Pela monotonia, a fortiori $|s - x_n| < \epsilon$ para todo $n > N$. Isto é, $x_n \to s$.

Analogamente para uma sequência monotonamente decrescente. □

Corolário B.16. *Seja (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$. Se (x_n) é limitado, então tem uma subsequência convergente.*

Demonstração: Pelo Lema B.14 e Lema B.15. □

Corolário B.17 (Teorema de Heine-Borel). *Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto se, e tão somente se, é limitado e fechado.*

Demonstração: Como espaço métrico $\mathbb{R}$ é compacto se, e tão somente se, é sequencialmente compacto pelo Teorema B.13.

$\Longleftarrow$: Pelo Corolário 2.78, toda sequência tem uma subsequência convergente. Como K é fechado, este limite é pela Proposição 2.16 em K. Logo K é sequencialmente compacto.

$\Longrightarrow$: Pela Proposição B.8, todo subconjunto compacto é fechado e limitado. □

C. Teorema de Hahn-Banach

Veremos que o Teorema de Hahn-Banach não-arquimediano vale se, e tão somente se, o corpo de coeficientes é esfericamente completo.

C.1. Corpos Esfericamente Completos

Recordemo-nos de que, pelo Critério de Cantor, um corpo $\mathbf{K}$ é *completo* se, e tão somente se, para cada sequência de bolas fechadas $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ em $\mathbf{K}$ *cujos raios convergem a* 0, vale $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$.

Definição. Um corpo $\mathbf{K}$ é *esfericamente completo* se, e tão somente se, para cada sequência de bolas fechadas $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, vale $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$.

Isto é, a condição é mais forte porque não se restringe mais a sequências de bolas cujos raios convergem a 0.

Observação. Se o corpo é não-arquimediano, então não importa se as bolas sejam fechadas ou abertas.

Proposição C.1. *Todo corpo localmente compacto* $\mathbf{K}$ *é esfericamente completo.*

Demonstração: Pela Proposição B.10, um conjunto K é localmente compacto se, e tão somente se, para toda coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos fechados em K cujas interseções finitas são todas não-vazias, a sua interseção total $\bigcap \mathcal{F}$ é não-vazia. Se $\mathbf{K}$ é localmente compacto, então toda bola fechada $\bar{B}(x, \epsilon)$ é compacta. As interseções finitas da coleção $\{B_1, B_2, \ldots\}$ são em particular todas não-vazias em $K = B_1$; logo, por K ser compacto, $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$. □

Exemplo C.2.

- Pelo ??, todos os corpos locais, tais como os corpos $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{F}_p((t))$ e as suas extensões finitas, são localmente compactos. (Pelo ??, estes corpos são todos os corpos localmente compactos.)

- Pelo Teorema de Heine-Borel, todo subconjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}$ (e em $\mathbb{C}$) é compacto; em particular, toda bola fechada é compacta. Logo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são localmente compactos.

Recordemo-nos que, pelo ??, o fecho algébrico $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$ é incompleto e que $\mathbb{C}_p$ denota o seu completamento. ?? alistou umas das suas propriedades principais: Em particular, o seu grupo de valores é denso, $|\mathbb{C}_p^*| = p^{-\mathbb{Q}}$.

Teorema C.3. *Seja* $\mathbf{K}$ *um corpo não-arquimediano. Se* $\mathbf{K}$ *é*

- *separável, isto é, contenha um subconjunto enumerável denso, e*
- *a sua valoração é densa, isto é, cuja imagem é densa em* $\mathbb{R}$*,*

então $\mathbf{K}$ *não é esfericamente completo.*

Demonstração: Pela valoração densa, existem raios $r_1 > r_2 > \ldots$ tal que $r := \lim r_n > 0$. Pela separabilidade, existe um subconjunto enumerável $\{s_1, s_2, \ldots\}$ denso em $\mathbf{K}$. Seja B_1 uma bola fechada de raio r_1 que não contenha s_1. Pela valoração densa, a bola B_1 de raio r_1 contem uma infinitude de bolas de raio r_2; seja B_2 uma tal bola "fechada" embutido em B_1 que não contenha s_2. A sequência $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ assim construida tem intersecção vazia: Caso contrário, seria uma bola "fechada" de raio r, em particular, aberta, isto é, conteria um dos elementos s_1, s_2, ... em contradição às escolhas de B_1, B_2, ... □

Corolário C.4. *O corpo* $\mathbb{C}_p$ *não é esfericamente completo.*

Demonstração: O corpo $\mathbb{C}_p$ é

- separável, isto é, contém o subconjunto enumerável denso dos números algébricos $\overline{\mathbb{Q}}$ sobre $\mathbb{Q}$, e
- a sua valoração é densa, isto é, a sua imagem é densa em $\mathbb{R}$, por exemplo, porque contém $\{p, \sqrt[2]{p}, \sqrt[3]{p}, \ldots\}$.

Logo, pelo Teorema C.3, é esfericamente incompleto. □

C.2. Hahn-Banach

Seja $\mathbf{K}$ um corpo não-arquimediano. Um *funcional* sobre um espaço vetorial normado V sobre um corpo $\mathbf{K}$ é uma aplicação linear e contínua $f\colon V \to \mathbf{K}$.

Lema C.5. *Uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados é contínua se, e tão somente se, é* limitada*, isto é, tal que a sua imagem da bola unitária é contida em uma bola.*

Demonstração: Se é limitada, em particular é (uniformemente) contínua.

Seja $f\colon V \to W$ ilimitada, isto é, existe uma sequência x_1, x_2, ... (cujas entradas são) em V tal que $\|x_n\| \leq 1$ e $\|f(x_1)\|$, $\|f(x_2)\|$, ... é ilimitada. Sejam λ_1, λ_2, ... em $\mathbf{K}$ tal que

$$\{\|f(\lambda_1 x_1)\|, \|f(\lambda_2 x_2)\|, \ldots\}$$

é limitada e o seu máximo > 1. Como $x_1, x_2, \ldots$ é limitada, $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots$ converge a 0. Como $\|f(\lambda_1 x_1)\|, \|f(\lambda_2 x_2)\|, \ldots > 1$, $f(x_1), f(x_2), \ldots$ não converge a $f(0) = 0$. Em particular, f não é contínua (em 0). □

A norma $\|f\|$ de um funcional f é definida por

$$\|f\| := \sup\{|f(v)| : v \text{ em V com } \|v\| \le 1\}.$$

O Teorema de Hahn-Banach demonstra-se para um espaço vetorial sobre um corpo esfericamente completo como para um espaço vetorial sobre os números reais: Trocam-se os intervalos reais pelas bolas não-arquimedianos; ora, a sua interseção não é vazia porque o corpo é esfericamente completo.

Teorema C.6 (Hahn-Banach não-arquimediano). *Seja* $\mathbf{K}$ *um corpo normado. Seja* X *um espaço vetorial normado sobre* $\mathbf{K}$ *e seja* M *um sob-espaço em* X. *Se* $\mathbf{K}$ *é esfericamente completo, então todo funcional* $f\colon \mathrm{M} \to \mathbf{K}$ *estende-se a um funcional* $\mathrm{F}\colon \mathrm{X} \to \mathbf{K}$ *com* $\|\mathrm{F}\| = \|f\|$.

Demonstração: Se $f = 0$, então $\mathrm{F} = 0$ estende f como requerido. Logo, podemos supor f não-nulo.

Se $|\mathbf{K}| = \|\mathrm{V}\|$, então substitui f por λf com $|\lambda| = \|f\|^{-1}$ para obter $\|f\| = 1$. Caso contrário, o argumento permanece o mesmo, mas um fator adicional aparece em várias equações. Permitamo-nos supor que $\|f\| = 1$.

Primeiro, consideremos o caso $\mathrm{X} = \mathrm{M} \oplus \mathbf{K} \cdot m_0$ para m_0 em X: Precisamos de determinar α em $\mathbf{K}$ tal que

$$\mathrm{F}(m + \lambda m_0) := f(m) + \lambda\alpha$$

tem norma 1, isto é,

$$|f(m) + \lambda\alpha| \le \|m + \lambda m_0\|$$

para todo m em M e λ em $\mathbf{K}$. Em particular, para $\tilde{m} = -\lambda m$,

$$|f(\tilde{m}) + \lambda\alpha| = |\lambda||f(m) - \alpha| \quad \text{e} \quad \|\tilde{m} + \lambda m_0\| = |\lambda|\|m - m_0\|.$$

Por isto, basta demonstrar que exista α tal que

$$|f(m) - \alpha| \le \|m - m_0\|$$

para todo m em M. Esta desigualdade vale se, e tão somente se, α em

$$\bigcap_{m \text{ em M}} \mathrm{B}_{\le \|m - m_0\|}(f(m)).$$

Como $\mathbf{K}$ é esfericamente completo, para esta interseção infinita não ser vazia, basta toda interseção sua finita não ser vazia; isto é, para m' e m'' em M,

$$B_{\leq \|m'-m_0\|}(f(m')) \cap B_{\leq \|m''-m_0\|}(f(m'')) \neq \emptyset.$$

Isto vale pois

$$|f(m') - f(m'')| = |f(m' - m'')| \leq \|m' - m''\| \leq \|m' - m_0\| + \|m'' - m_0\|.$$

Ora, consideremos o caso que X seja qualquer espaço vetorial normado que contém M. As extensões F de f com $\|F\| = \|f\|$ são parcialmente ordenados por $F' \leq F''$ se $F''_{\restriction N'} = F'$ e toda cadeia $(F_i : i \in I)$ tem a cota superior dada pelo gráfico $\bigcup\{$ gráfico de $F_i : i \in I\}$. Pelo Lema de Zorn, Teorema E.2, existe uma extensão máxima $F^* : M^* \to \mathbf{K}$ com $\|F\| = \|f\|$.

Se existisse m_0 em $X - M^*$, então existe uma extensão $F : M^* \oplus \mathbf{K}m_0 \to \mathbf{K}$ com $\|F\| = |F^*| = |f|$ pelo caso que acabamos de mostrar; em particular, F^* não seria máxima. Logo, $M^* = X$. □

Com efeito, o Teorema de Hahn-Banach vale para todos os espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbf{K}$ se, e tão somente se, $\mathbf{K}$ é esfericamente completo! Contudo, para certos espaços vetoriais normados, o Teorema de Hahn-Banach vale independentemente do copo ser esfericamente completo ou não:

Proposição C.7 ([PGS09, Theorem 4.2.4]). *Seja* X *um espaço vetorial sobre um corpo não-arquimediano* $\mathbf{K}$. *Se* X *é de* tipo finito, *isto é, tem um subespaço de* dimensão numerável denso, *então a conclusão do Teorema de Hahn-Banach vale (sem a condição que* $\mathbf{K}$ *seja esfericamente completo).*

Por exemplo, $c^0(\mathbb{N})$ é de tipo finito.

C.3. Contra-Exemplo ao Teorema de Hahn-Banach

Construamos um contra-exemplo ao Teorema de Hahn-Banach se $\mathbf{K}$ esfericamente incompleto: Denotamos

- por $c^0(\mathbb{N})$ as sequências com entradas em $\mathbf{K}$ que convergem a zero, e
- por $c^b(\mathbb{N})$ as sequências com entradas em $\mathbf{K}$ que são limitadas.

Ambos os conjuntos são espaços de Banach pela norma

$$\|(a_n)\| := \sup\{|a_n| : n \text{ em } \mathbb{N}\}.$$

Para um espaço vetorial normado V, seja

$$V^* := \{ \text{ todas as aplicações } f : V \to \mathbf{K} \text{ contínuas e lineares } \}$$

o seu dual contínuo dos funcionais sobre V, isto é, o espaço vetorial com a norma

$$\|f\| := \sup\{|f(v)| : v \text{ em } V\}.$$

Proposição C.8. *Temos*

$$c^0(\mathbb{N})^* = c^b(\mathbb{N})$$

Demonstração: Pelo Lema D.4 uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados é contínua se, e tão somente se, é limitada. □

Dado que **K** não é esfericamente completo, explicitemos o espaço vetorial sem qualquer funcional diferente de zero: Denotemos

- por $V = c^b(\mathbb{N})$ as sequências com entradas em **K** que são limitadas,
- por $W := c^0(\mathbb{N})$ as sequências com entradas em **K** que convergem a zero, e
- por $X := V/W$ o seu quociente.

Os espaços vetoriais V e W são equipados com a sua norma de supremo natural, e o espaço vetorial $X = V/W$ é equipado com a norma de quociente dada por

$$\|\bar{x}\| := \inf\{\|x\| \text{ para todos os } x \text{ em } \bar{x} = x + V\}.$$

Com efeito, vale $\|\bar{x}\| = \limsup |x_n|$ se (x_n) em V é um representante de $\bar{x}$ em X.

Definição. Um espaço vetorial normado V é *esfericamente completo* se, e tão somente se, para cada sequência de bolas $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ em V vale $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$.

Proposição. *O espaço* X *é esfericamente completo.*

Demonstração: Seja $B_1 = B_{\leq r_1}(\bar{x}_1) \supseteq B_{\leq r_2}(\bar{x}_2) \supseteq \ldots$ uma sequência de bolas em X com $r_1 > r_2 > \ldots$ Sejam $x_1, x_2, \ldots$ em V representantes de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ em X indutivamente escolhidos tal que $\|x_n - x_{n+1}\| \leq r_{n-1}$ para todo $n > 1$. Seja $x := (x_{n,n})$ a sequência diagonal. Observamos que x em V, e que para qualquer $n > 1$,

$$\|\bar{x} - \bar{x}_n\| = \|\overline{x - x_n}\| = \limsup_i |x_{i,i} - x_{n,i}| \leq \limsup_i \|x_i - x_n\| \leq r_{n-1}$$

Por isso,

$$\bar{x} \in \bigcap B_{\leq r_{n-1}}(\bar{x}_n) = \bigcap B_{\leq r_n}(\bar{x}_{n+1}) = \bigcap B_{\leq r_n}(\bar{x}_n).$$

Lema C.9. *Se um espaço vetorial normado é esfericamente completo, então o seu quociente por todo subespaço fechado é esfericamente completo.*

Demonstração: Seja V esfericamente completo e W um subespaço fechado. Seja $X = V/W$. Seja $B_{\leq r_1}(\bar{x}_1) \supseteq B_{\leq r_2}(\bar{x}_2) \supseteq \ldots$ uma sequência de bolas em X com $r_1 > r_2 > \ldots$ Sejam $x_1, x_2, \ldots$ em V representantes de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ em X indutivamente escolhidos tal que $\|x_n - x_{n+1}\| \leq r_{n-1}$ para todo $n > 1$. Como V é esfericamente completo, existe x em V tal que $\|x - x_n\| \leq r_{n-1}$ para todo $n > 1$. Em particular, $\|\bar{x} - \bar{x}_n\| \leq r_{n-1}$ para todo $n > 1$. Por isso,

$$\bar{x} \in \bigcap B_{\leq r_{n-1}}(\bar{x}_n) = \bigcap B_{\leq r_n}(\bar{x}_n).$$

Corolário. *Se* $\mathbf{K}$ *não é esfericamente completo, então o único funcional* $f\colon X \to \mathbf{K}$ *é* $f = 0$.

Demonstração: Como f é contínuo, $\ker f = f^{-1}\{0\}$ é fechado. Se $f \neq 0$, então $V/\ker f = \mathbf{K}$ seria esfericamente completo pelo Lema C.9. □

Por exemplo, pelo Corolário C.4, $X^* = 0$ sobre $\mathbf{K} = \mathbb{C}_p$.

D. Teorema de Alaoglu

O Teorema de Alaoglu é o principal ingrediente na demonstração do Teorema da Dualidade de Schikhof.

Seja $\mathbf{K}$ um corpo normado. Um espaço vetorial é *topológico* se é um espaço vetorial com uma topologia tal que a adição + e a multiplicação escalar · são contínuas. Um *funcional* sobre um espaço vetorial topológico V sobre $\mathbf{K}$ é uma aplicação linear e contínua $f\colon \mathrm{V} \to \mathbf{K}$. Denote

$$\mathrm{V}^* := \{ \text{ todos os funcionais } f\colon \mathrm{V} \to \mathbf{K}\}.$$

Exemplo D.1. Por exemplo, se $\mathbf{K}$ é não-arquimediano e V consiste das sequências de nulo,

$$\mathrm{V} = c_0(\mathbb{N}) := \{(a_n : n \in \mathbb{N}) : a_n \to n\}$$

então V^* consiste das sequências limitadas,

$$\mathrm{V}^* = c^b(\mathbb{N}) := \{(a_n : n \in \mathbb{N}) : \sup\{|a_n|\} < \infty\}.$$

D.1. Topologia Fraca e Fraca*

A topologia *fraca* de V é a topologia inicial dos funcionais sobre V; isto é, a menor topologia tal que todo funcional $f\colon \mathrm{V} \to \mathbf{K}$ seja contínua; isto é, a topologia gerada pelas pré-imagens $f^{-1}\mathrm{U}$ para os funcionais $f\colon \mathrm{V} \to \mathbf{K}$ e conjuntos abertos U em $\mathbf{K}$.

Exemplo D.2. Por exemplo, se $\mathrm{V} = c_0(\mathbb{N})$, então (v_n) em V converge para a topologia fraca se, e tão somente se, (v_n) é limitada e converge em cada coordenada.

A topologia *fraca** de V^* é a topologia inicial das avaliações $f \mapsto f(v)$ para todos os v em V; isto é, a menor topologia tal que toda avaliação $e_v\colon \mathrm{V}^* \to \mathbf{K}$ definida por $e_v\colon f \mapsto f(v)$ para v em V seja contínuas; isto é, a topologia gerada pelas pré-imagens $e_v^{-1}\mathrm{U}$ para todas as avaliações $e_v\colon \mathrm{V}^* \to \mathbf{K}$ e conjuntos abertos U em $\mathbf{K}$.

Se V é separável com subconjunto denso enumerável $\{v_n\}$, então a topologia fraca* é induzida pela métrica

$$\mathrm{d}(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|[x-y](v_n)|}{1+|[x-y](v_n)|}.$$

Logo, formulado de forma mais palpável pela convergência das sequências (que definem os conjuntos fechados, logos os abertos como os seus complementos): Uma sequência (f_n) em V^* converge se $(f_n(x))$ converge para todo x em V.

Exemplo D.3. Por exemplo, se $V = c_0(\mathbb{N})$ e $V^* = c^b(\mathbb{N})$, então (f_n) converge para a topologia fraca* se, e tão somente se, (f_n) é limitada e converge em cada coordenada.

D.2. Topologia Forte (ou do Operador)

Lema D.4. *Uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados é contínua se, e tão somente se, é limitada.*

Demonstração: Se é limitada, em particular é (uniformemente) contínua.

Seja $f \colon V \to W$ ilimitada, isto é, existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ (cujas entradas são) em V tal que $\|x_n\| \leq 1$ e $\|f(x_1)\|, \|f(x_2)\|, \ldots$ é ilimitada. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ em $\mathbf{K}$ tal que $\|f(\lambda_1 x_1)\|, \|f(\lambda_2 x_2)\|, \ldots$ é limitada e maior do que 1. Como $x_1, x_2, \ldots$ é limitada, $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots$ converge a 0. Como $\|f(\lambda_1 x_1)\|$, $\|f(\lambda_2 x_2)\|, \ldots > 1$, $f(x_1), f(x_2), \ldots$ não converge a $f(0) = 0$. Em particular, f não é contínua (em 0). $\square$

A *norma de operador* $\|f\|$ de um funcional f é definida por

$$\|f\| := \sup\{|f(v)| : v \text{ em } V\};$$

que dá a V^* uma métrica d definida por $d(f,g) = |f-g|$. que induz a topologia gerada pela base das bolas abertas $B(x,r) := \{g \in V^* : d(g,f) < \epsilon\}$.

D.3. Reflexividade

Define o homomorfismo *canónico* $V \to V^{**}$ entre V o seu dual duplo $V^{**} := (V^*)^*$ por $v \mapsto [f \mapsto f(v)]$.

Definição D.5. Um espaço vetorial topológico V é *reflexivo*, se a aplicação $V \hookrightarrow V^{**}$ é sobrejetora.

Exemplo D.6.

- Se $\mathbf{K}$ é não-arquimediano e esfericamente completo, então um espaço de Banach V é reflexivo se, e tão somente se, $\dim V < \infty$.

- Se $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então todo espaço vetorial de dimensão finita é reflexivo e todo espaço de Hilbert V é reflexivo, isto é, um espaço vetorial com um *produto escalar*, isto é, uma aplicação bilinear (ou, equivalentemente, linear em um dos dois argumentos) $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbf{K}$ tal que

$$\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$$

  onde $\bar{\cdot}$ é a conjugação complexa, e

$$\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x,x\rangle = 0 \text{ tão somente se } x = 0.$$

  tal que ele é completo para a (métrica induzida pela) norma $\|\cdot\|$ definida por $\|x\| = \langle x,x\rangle$.

- Se $\mathbf{K}$ é uma extensão completa de $\mathbb{Q}_p$, então o espaço vetorial topológico das funções *localmente analíticas* (isto é, dada em uma vizinhança de cada ponto por uma série de potências) $\mathbb{Z}_p \to \mathbf{K}$ é reflexivo para a sua topologia natural (definida pelas normas das séries de potências locais, vide [Sch02, Exemplo após Proposition 16.10]).

Lema D.7. *Seja* V *um espaço vetorial topológico sobre um corpo normado* $\mathbf{K}$. *Se* V *é normado e* $\mathbf{K}$ *é esfericamente completo, então o homomorfismo* $V \to V^{**}$ *é injetor.*

Demonstração: Se $v \neq 0$, então existe pelo Teorema de Hahn-Banach f em V^* com $f(v) = 1$. □

Corolário D.8. *Seja* V *um espaço vetorial topológico sobre um corpo normado* $\mathbf{K}$. *Se* V *é normado e* $\mathbf{K}$ *é esfericamente completo, então* V *é reflexivo se, e tão somente se,* $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ *como homomorfismo isométrico.*

Demonstração: Pelo Lema D.7. □

Se $\mathbf{K}$ é completo, então V^* é completo como espaço normado (pela norma de operador). Logo, se V é normado e reflexivo, então $V = V^{**}$ é completo. Isto é, V é um espaço de Banach.

Corolário D.9. *Seja* V *um espaço vetorial topológico. Se* V *é normado e reflexivo, então a topologia* fraca* *de* V^* *é igual à topologia* fraca *de* V^*.

Demonstração: Pelo Corolário D.8, o homomorfismo $V \to V^{**}$ dado por $v \mapsto [f \mapsto f(v)]$ é bijetor. Logo, pela sua definição, as topologias fraca e fraca* são iguais. □

Fato D.10. *Um espaço de Banach* V *sobre* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *é reflexivo se, e tão somente se, a sua bola unitária* $\{v \in V\colon \|v\| \leq 1\}$ *é compacta para a topologia fraca.*

Definição D.11. Um corpo $\mathbf{K}$ é *localmente compacto* se para todo x em $\mathbf{K}$ existe uma vizinhança $V \ni x$ compacta.

Equivalentemente, um corpo $\mathbf{K}$ é *localmente compacto* se para todo x em $\mathbf{K}$ existe uma vizinhança aberta $V \ni x$ tal que o seu fecho é compacto.

Se a bola unitária de $\mathbf{K}$ é compacta, então $\mathbf{K}$ é localmente compacto.

Por exemplo, $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e as extensões finitas de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{F}_p((t))$ são localmente compactos (e de fato constituem todos tais corpos). Já vimos que $\mathbb{Z}_p$, a bola unitária de $\mathbb{Q}_p$, é compacto; logo $\mathbb{Q}_p$ é localmente compacto (e semelhantemente $\mathbb{F}_p((t))$). Para ver que $\mathbb{R}$ (e logo $\mathbb{C}$) é localmente compacto, basta pelo Teorema B.13 mostrar que todo subconjunto limitado é sequencialmente compacto, isto é, que toda sequência limitada tem uma subsequência convergente.

A bola *unitária* B de V^* é a bola fechada $B(0,1) := \{f \in V^* : \|f\| \leq 1\}$

Teorema D.12 (Teorema de Banach-Alaoglu). *Seja $\mathbf{K}$ um corpo topológico e V um espaço normado sobre $\mathbf{K}$. Se a bola unitária em $\mathbf{K}$ é compacta, então a bola unitária fechada de V^* é compacta para a topologia fraca*.*

Demonstração: Seja B a bola unitária fechada de V e seja B^* a bola unitária fechada de V^*. Seja b a bola unitária fechada de $\mathbf{K}$. Logo

$$B^* \hookrightarrow b^B$$

por $f \mapsto f_{\restriction B}$. Como, por definição,

- a topologia do produto é a menor topologia que torna todas as projeções contínuas,
- a topologia fraca* de V^* é a menor topologia que torna todas as avaliações $f \mapsto f(v)$ para v em V contínuas,

a inclusão é um mergulho, isto é, um homeomorfismo à sua imagem. Logo, B^* é compacta se, e tão somente se, a sua imagem em b^B é compacta. Pelo Teorema de Tychonoff, o produto b^B dos compactos b é compacto para a topologia do produto. Logo, basta verificar que B^* é fechada em b^B. Dado $f : B \to b$, vale f em B^* se, e tão somente se, é restrição de uma aplicação linear, isto é,

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para todo v e w em B tal que $v + w$ em B, e
- $f(\lambda w) = \lambda f(v)$ para todo λ em $\mathbf{K}$ e v em B tal que λv em V.

Isto é,

$$\begin{aligned} B^* = &\bigcap \{T_{v,w}^{-1}\{0\} : v, w \in B \text{ com } v + w \in B\} \\ &\cap \bigcap \{T_{\lambda,w}^{-1}\{0\} : \lambda \in \mathbf{K}, w \in B \text{ com } \lambda v \in B\} \end{aligned}$$

onde as avaliações lineares com domínio B e contra-domínio b são dadas por

$$T_{v,w} \colon f \mapsto f(v+w) - (f(v) + f(w)) \quad \text{e} \quad T_{\lambda,w} \colon f \mapsto f(\lambda v) - (\lambda f(v)).$$

Como todas as $T_{v,w}$ e $T_{\lambda,w}$ são contínuas, o conjunto unitário $\{0\}$ é fechado e a interseção de conjuntos fechados é fechada, concluímos que B^* é fechada. □

Lema D.13. *Seja* V *um espaço vetorial topológico. Se* V *é separável, então existe uma métrica cujas bolas geram a topologia fraca** *de* V^*.

Demonstração: Para um subconjunto $\{x_n\}$ denso em V, define a função distância de X^* por

$$d(x,y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|[x-y](x_n)|}{1 + |[x-y](x_n)|}.$$

Corolário D.14. *Seja* V *um espaço vetorial normado. Se* V *é separável, então a bola unitária fechada de* V^* *é sequencialmente compacta para a topologia fraca***, isto é, toda sequência* (f_n) *em* V^* *tem uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que existe* f *em* V^* *com* $f_{n_k}(v) \to f(v)$ *para todo* v *em* V.

Demonstração: Primeiro Teorema D.12, depois Lema D.13 permite aplicar Teorema B.13. □

Corolário D.15. *Seja* V *um espaço vetorial normado. Se* V *é reflexivo, então a bola unitária fechada de* V *é compacta para a topologia fraca. Se* V *é reflexivo e* V^* *é separável, então a bola unitária fechada de* V *é sequencialmente compacta para a topologia fraca, isto é, toda sequência* (v_n) *em* V *tem uma subsequência* (v_{n_k}) *tal que existe* v *em* V *com* $f(v_{n_k}) \to f(v)$ *para todo* f *em* V^*.

Demonstração: Se V é reflexivo, então a topologia fraca sobre V^* é igual à topologia fraca* sobre V^*. Logo, a topologia fraca* sobre V^{**} é igual à fraca sobre $V^{**} = V$. Logo, pelo Teorema D.12 aplicado a $W = V^*$, a bola unitária fechada de $V = W^*$ é compacta para a topologia fraca.

Se V^* é um espaço normado e separável, então V é separável (sem demonstração). Logo, se V^* é separável e reflexivo, então V^{**} é separável. Então pelo Corolário D.14, a bola unitária fechada de V^{**} é sequencialmente compacta para a topologia fraca*. Como V é reflexivo, a topologia fraca* sobre V^{**} é igual à fraca, e $V^{**} = V$. □

E. O Lema de Zorn

Uma *ordenação parcial* é uma relação $\leq$ sobre um conjunto X que é

- *reflexiva*, isto é, $x \leq x$,
- *anti-simétrica*, isto é, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$, e
- *transitiva*, isto é, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Se $x \leq y$, digamos que x é *menor* que y. Denote $x < y$ que $x \leq y$ e $x \neq y$. Denote $y \geq x$ que $x \leq y$, digamos que y é *maior* que x, e denote $y > x$ que $x < y$.

Uma *ordenação total* ou *cadeia* é uma ordenação parcial que satisfaz, além disso, que ou $x \leq y$, ou $y \leq x$.

Um elemento x_0 em X é

- *mínimo* se não existe $x < x_0$ em X, e
- *máximo* se não existe $x > x_0$ em X.

Um elemento x_0 em X é

- o *menor* elemento se $x_0 \leq x$ para todo x em X, e
- o *maior* elemento se $x_0 \geq x$ para todo x em X.

Se X é totalmente ordenado, então todo elemento mínimo é o menor elemento e todo elemento máximo é o maior elemento.

Uma *boa ordenação* é uma ordenação total tal que todo subconjunto não-vazio tem um menor elemento.

Seja Y um subconjunto de X. Um elemento x em X é

- uma cota *inferior* se $x \leq y$ para todo y em Y, e
- uma cota *superior* se $x \geq y$ para todo y em Y.

Se X é bem-ordenado e existe uma cota superior de Y que não pertence a Y, então existe um *supremo* s de Y, uma menor cota superior entre todas as cotas superiores de Y que não pertence a Y, e $Y = \{x \in X : x < s\}$.

Um subconjunto Y é um *segmento inicial* (ou *fechado*) em um conjunto parcialmente ordenado X, se, para todo y em Y, se $x \leq y$, então x em Y. Denote $X \leq Y$ que X é um segmento inicial em Y (e $Y \geq X$ que $X \leq Y$), e $X < Y$ que $X \leq Y$ e $X \neq Y$ (e $Y > X$ que $X < Y$).

E.1. Demonstração

A união de uma cadeia de conjuntos bem-ordenados é bem-ordenada:

Lema E.1. *Seja* X *parcialmente ordenado e* $\mathcal{F}$ *uma coleção de subconjuntos de* X *bem-ordenados. Se para todo* C *e* D *em* $\mathcal{F}$*, ou* $C \leq D$*, ou* $C \geq D$*, então* $E = \bigcup \mathcal{F}$ *é bem-ordenado e* $E \geq C$ *para todo* C *em* $\mathcal{F}$*.*

O Lema de Zorn frequentemente é formulado com uma condição mais restritiva, isto é: Todo subconjunto totalmente ordenado, ao invés de apenas todo subconjunto bem-ordenado (= subconjunto totalmente ordenado cujos subconjuntos não-vazios todos têm um elemento menor), tem uma cota superior. Porém, na prática, esta restrição revela-se irrelevante. Demonstremos a formulação mais geral:

Teorema E.2 (Lema de Zorn). *Dado um conjunto* X *não-vazio e parcialmente ordenado. Se todo subconjunto bem-ordenado tem uma cota superior, então* X *tem um elemento máximo.*

Demonstração (segundo H. Kneser): Suponhamos o contrário, isto é, para cada elemento x em X exista $y > x$. Logo, pela hipótese, para cada subconjunto bem-ordenado $C \subseteq X$ existe um supremo de C que não pertence a C, denotado por $g(C)$. Define um *g-conjunto* como um subconjunto bem-ordenado $C \subseteq X$ tal que todo $c \in C$ é supremo de $\{c' \in C : c' < c\}$, isto é, $c = g(\{c' \in C : c' < c\})$.

Afirmação: Se C e D são g-conjuntos, então, ou $C \leq D$, ou $C \geq D$.

Prova: Seja $W = \bigcup\{B \subseteq X : B \leq C \text{ e } B \leq D\}$. Como todos os subconjuntos B são segmentos iniciais, também W é um segmento inicial; logo $W \leq C$ e $W \leq D$, e W é o maior subconjunto com esta propriedade. Se $W = C$ ou $W = D$, então a demonstração é finalizada. Suponhamos o contrário, isto é, $W < C$ e $W < D$, e sejam c em C e d em D os supremos de W em C respectivamente D, isto é,

$$\{c' \in C : c' < c\} = W = \{d' \in D : d' < d\}.$$

Como C e D são g-conjuntos, $c = g(W) = d$. Põe $W' := W \cup \{g(W)\}$; é um g-conjunto $> W$ que satisfaz $W' \leq C$ e $W' \leq D$: contradição a W ser máximo com esta propriedade!

Põe $W := \bigcup\{$ todos os g-conjuntos$\}$. A união de uma cadeia de g-conjuntos é um g-conjunto: Pela Afirmação as condições de Lema E.1 são satisfeitas, logo W é bem-ordenado. Além disto, como união de g-conjuntos, W é um g-conjunto; é o maior g-conjunto de X. Porém, $W' = W \cup \{g(W)\}$ é um g-conjunto $> W$: contradição a W ser máximo com esta propriedade! $\square$

O Lema de Zorn equivale ao Axioma da Escolha. O nome faz referência ao matemático Max Zorn, mas sua primeira formulação se deve ao matemático polonês Kazimierz Kuratowski.

E.2. Uma Aplicação

Como aplicação do *Lema de Zorn*, provemos que *todo espaço vetorial* V *possui uma base*, um subconjunto de vetores linearmente independentes que gera V. O Lema de Zorn fornecerá um subconjunto B de vetores linearmente independentes máximo; provemos que tal B é uma base, isto é, gera V:

Lema E.3. *Seja* V *um espaço vetorial e* B *um subconjunto de vetores linearmente independentes em* V. *Se* B *é máximo, então* B *gera* V.

Demonstração: Seja $x \in V - B$ não-nulo. Como B é máximo, o superconjunto próprio de B definido por $B \cup \{x\}$ contém vetores linearmente dependentes; isto é, existe uma combinação linear $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta x = 0$ com alguns coeficientes não-nulos. Logo $\beta \neq 0$, caso contrário já B teria tido vetores linearmente independentes. Portanto, $x = \frac{-\alpha_1}{\beta} v_1 + \cdots + \frac{-\alpha_n}{\beta} v_n$. Isto é, B gera V. □

Teorema E.4 (Todo espaço vetorial tem uma base). *Seja* V *um espaço vetorial. Se* L *é um conjunto de vetores linearmente independentes em* V, *então existe um conjunto de vetores linearmente independentes máximo em* V *que contém* L.

Demonstração: Para aplicar o Lema de Zorn, construamos um conjunto e definir uma relação de ordem parcial: Como desejamos aumentar um conjunto de vetores linearmente independentes, definamos

$$X = \{x \in P(V) : x \supseteq L \text{ e } x \text{ consiste de vetores linearmente independentes }\}$$

e equipamos X com a ordem parcial natural dada por $x \leq y$ se $x \subseteq y$. O conjunto X não é vazio, porque $L \in X$.

Provemos que todo subconjunto totalmente ordenado de X tem uma cota superior: Seja $T \subseteq X$ não-vazio e totalmente ordenado.

Põe $Q = \bigcup\{x \in T\}$. Pela sua definição, Q é uma *cota superior*, isto é, $x \subseteq Q$ para todo $x \in T$. Para concluir, falta verificar que Q em X, isto é, $L \subseteq Q$ e que todos os vetores em Q são linearmente independentes:

Como L é um subconjunto de todo elemento de X, então L é um subconjunto de todo elemento de T. Logo, $L \subseteq Q$

Verifiquemos que Q é linearmente independente: Seja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0$ uma combinação linear de elementos distintos de Q. Como Q é uma união de conjuntos, existe para todo $i = 1, \ldots, n$ um x_i em T tal que $v_i \in x_i$. Como T é totalmente ordenado, dentre os x_i existe um deles x_{i_0} que é superconjunto de todos os outros. Logo $v_i \in x_{i_0}$ para todo $i = 1, \ldots, n$; portanto $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0$ é uma combinação linear de vetores de x_{i_0}. Como x_{i_0} é um conjunto de vetores linearmente independentes, obtemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$. Isto é, todos os vetores em Q são linearmente independentes.

Ora se aplica o *Lema de Zorn* ao conjunto X para obter um elemento máximo B. □

E.3. História

Kazimierz Kuratowski provou em 1922 [1] uma versão menos genérica do Lema de Zorn (usando conjuntos parcialmente ordenados pela inclusão e fechados relativamente à união arbitrária de cadeias bem-ordenadas). O Lema na sua forma atual (usando qualquer relação de ordem, e usando qualquer cadeia totalmente ordenada) foi proposto independentemente por Max Zorn em 1935. [2] Zorn propôs esta formulação como um novo axioma da teoria dos conjuntos, como um substituto do teorema da bem-ordenação, exibiu algumas das suas aplicações na álgebra. Ele também prometeu mostrar a equivalência entre o seu lema e o *axioma da escolha* em outro artigo, mas nunca o escreveu.

[1] Casimir Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fundamenta Mathematicae 3 (1922), pp. 76–108. icm

[2] Max Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), no. 10, pp. 667–670.

F. O Teorema de Ostrowski

F.1. Números p-ádicos

Seja A um anel. Um *valor absoluto* em A é uma aplicação $|\cdot|\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

- (Hausdorff) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,
- (Multiplicatividade) $|xy| = |x||y|$, e
- (Desigualdade Triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ao invés de valor absoluto, usa-se também o termo *norma*. Chamamos um anel munido de uma tal norma de anel *normado*.

Seja $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ um número primo.

Definição. Seja

$$|\cdot|_p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

a norma *p-ádica* definida por $|0|_p := 0$ e

$$|a|_p := p^{-v_p(a)}, \text{ onde } p^{v_p(a)} \text{ é a maior potência de } p \text{ que divide } a.$$

Exemplo.

- Para $p = 2$ temos que $|8|_2 = |2^3|_2 = 2^{-3}$ e $|9|_2 = |9 \cdot 2^0|_2 = 2^{-0} = 1$;
- para $p = 3$ temos que $|8|_3 = |3^0 \cdot 8|_3 = 3^{-0} = 1$ e $|9|_3 = |3^2|_3 = 3^{-2}$.

A norma p-ádica $|\cdot|_p$ mede quantas vezes p aparece na fatoração de um número inteiro. Por incrível que pareça para quem se acostumou à norma usual, a norma p-ádica *diminui* quando a potência de p *cresce*; um número inteiro grande (com respeito à norma usual) pode ter norma p-ádica pequena.

Nota. A contra-intuição da norma p-ádica $|\cdot|_p$, em comparação à norma usual, é que ela é *não-arquimediana*, isto é

$$|\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}| \leq 1 \quad \text{para todo } n.$$

Apesar da sua natureza aparentemente exótica, Teorema F.3 mostra que as únicas normas sobre $\mathbb{Q}$ são a norma usual e as normas p-ádicas.

Os números p-ádicos são relativamente recentes, em comparação aos números reais; foram introduzidos há cerca de cem anos por Kurt Hensel: Em analogia a $\mathbb{R}$, que consiste de todos os limites de $\mathbb{Q}$ para a norma usual $|\cdot|$, vamos definir $\mathbb{Z}_p$ como o conjunto dos limites de $\mathbb{Z}$ para a norma p-ádica $|\cdot|_p$. Formalmente, $\mathbb{Z}_p$ é o *completamento* de $\mathbb{Z}$ para $|\cdot|_p$.

Definição. O anel normado dos *números p-ádicos inteiros* é definido por

$$\mathbb{Z}_p := \text{ o completamento de } \mathbb{Z} \text{ com respeito à norma } p\text{-ádica } |\cdot|_p \,.$$

Em particular, como $|p^n|_p = p^{-n}$ e $|a_n|_p = 1$ para a_n em $\{1, \ldots, p-1\}$, vale $|a_n p^n|_p = p^{-n}$ e

$$|a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \cdots + a_N p^N|_p = p^{-n} \to 0 \quad \text{para } n \to \infty.$$

Isto é, a sequência $(a_0, a_0 + a_1 p, a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \ldots)$ é Cauchy. Como $\mathbb{Z}_p$ é completo, ela converge, isto é, a série infinita $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$ converge. Isto é, em $\mathbb{Z}_p$, todo número $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$ existe como limites de números em $\mathbb{Z}$, como em $\mathbb{R}$ todo número $b = b_0 + b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \cdots$ para b_0, b_1, ... em $\{0, 1, \ldots, 9\}$ existe como limites de números em $\mathbb{Q}$.

Uma vez que $\mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{Z}_p$, as funções $+$, $\cdot$ e $|\cdot|_p$ de $\mathbb{Z}$ uniformemente contínuas estendem-se ao completamento $\mathbb{Z}_p$. (Se $f \colon X \to Y$ é uma função de X cujo contra-domínio Y é completo, então $f(x) := \lim x_n$ para $x_n \to \hat{x}$ em $\widehat{X}$ estende f a $\widehat{X}$.) Por isso, $\mathbb{Z}_p$ é verdadeiramente um anel com um valor absoluto (e não somente um espaço métrico).

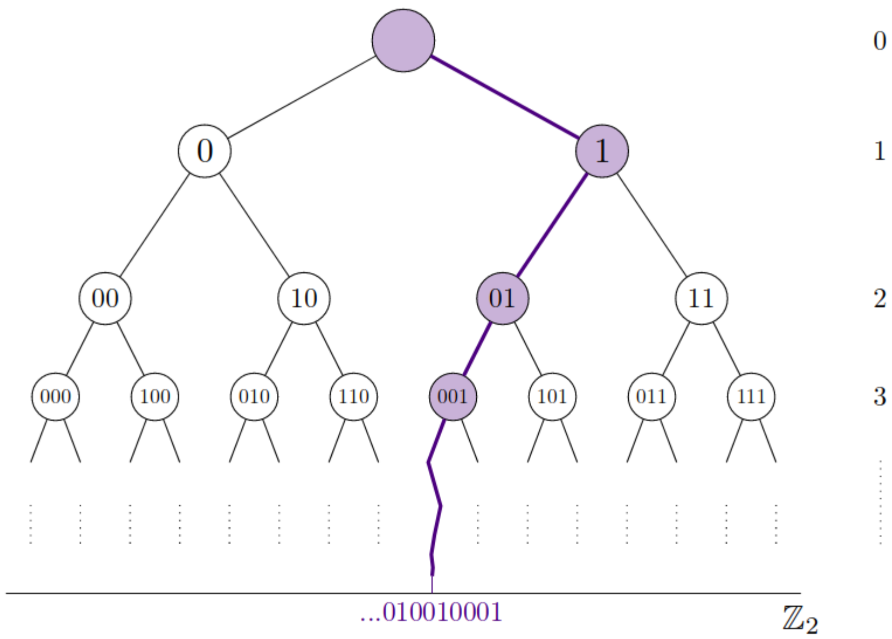

Figura F.1: A árvore binária que representa $\mathbb{Z}_2$

A árvore binária da Figura F.1 representa $\mathbb{Z}_2$ da seguinte maneira: Cada número p-ádico tem uma expansão p-ádica dada pelos seus coeficientes, sendo ou 0, ou 1, e conforme a estes coeficientes, pega, ou o ramo da esquerda, ou o da direita em uma bifurcação (ou nó) da árvore.

Reflitamos como se descreve o valor absoluto, a função distância e as bolas sobre eles:

- Temos $\mathrm{d}(x,y)_p = |x-y|_p = p^{-v}$ onde v = o nível em que os dois ramos infinitos x e y bifurcam; em particular, vale $|x|_p = p^{-v}$ onde v = o nível da primeira bifurcação em que o ramo infinito vai à direita.

- Uma bola corresponde a uma malha da árvore por $\mathrm{B}(x,p^{-n}) \mapsto x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ se $x = x_0 + x_1 p + \cdots$, onde $\mathrm{B}(x,p^{-n})$ é a bola com centro x e raio p^{-n} e $x_0 + x_1 p + \cdots + x_n p^n$ é o ramo finito que leva à malha; a bola é dada por todos os ramos infinitos que passam pela malha correspondente. Observamos que duas bolas, ou se incluem, ou são disjuntas! Isto é, em termos topológicos, $\mathbb{Z}_p$ é *totalmente desconexo.*

Definição. Seja

$$\mathbb{Q}_p := \text{ corpo das frações de } \mathbb{Z}_p \qquad \text{e} \qquad |x/y|_p := |x|_p/|y|_p$$

o corpo normado dos *números p-ádicos.*

Proposição F.1. *O mergulho $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ induz para todo n em $\mathbb{N}$ um isomorfismo de anéis*

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p.$$

Demonstração: Como a aplicação $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ tem núcleo $p^n\mathbb{Z}$, obtemos a injeção $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}$. Ela é sobrejetora se, e somente se, dado $\hat{x}$ em $\mathbb{Z}_p$ e n em $\mathbb{N}$, existe x em $\mathbb{Z}$ tal que $|\hat{x} - x|_p \leq p^{-n}$. Como $\mathbb{Z}$ é denso no seu completamento $\mathbb{Z}_p$, em particular tal x existe. □

Para um anel A, denote A^* o grupo multiplicativo das suas unidades. Por exemplo, $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Proposição F.2. *Temos*

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p.$$

Isto é, x em $\mathbb{Z}_p$ é invertível se, e somente se, $|x| = 1$.

Demonstração: Seja x em $\mathbb{Z}_p$. Se x é invertível, isto é, existe y em $\mathbb{Z}_p$ tal que $xy = 1$, em particular $1 = |1|_p = |xy|_p = |x|_p|y|_p$ e logo $|x|_p = 1$.

Seja x em $\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$. Pela Proposição F.1 e pelo Corolário G.4,

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

é um corpo, isto é, existe a em $\{1, \ldots, p-1\}$ tal que ax em $1 + p\mathbb{Z}_p$, isto é, $|ax - 1|_p < 1$. Pela série geométrica $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \to 1/(1-\alpha)$, existe $(ax)^{-1}$, e em particular $x^{-1} = a(ax)^{-1}$. □

Recordemos que um *ideal* I em um anel A é um subconjunto I em A tal que

- para x e y em I, vale $x + y$ em I, e
- para x em I e y em A, vale xy em I.

Isto é, em comparação a um subanel, o ideal é fechado sob multiplicações por qualquer elemento do anel inteiro, não só do subanel.

Um ideal é ***máximo*** se não existe outro ideal, distinto do anel todo, que o contenha.

Corolário.

- *O único ideal máximo de $\mathbb{Z}_p$ é $p\mathbb{Z}_p$.*
- $\{$ *ideais em* $\mathbb{Z}_p$ $\} = \{\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p, p^2\mathbb{Z}_p, \ldots\} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p] = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} p^n \mathbb{Z}_p^* \cup \{0\}$.

Demonstração:

- Seja A um anel. O complemento A − I de todo ideal I contém as unidades A^*. Logo, pela Proposição F.2, se I é um ideal em $\mathbb{Z}_p$, logo $\mathbb{Z}_p - I \supseteq Z_p^* = Z_p - p\mathbb{Z}_p$, ou, equivalentemente, $I \subseteq p\mathbb{Z}_p$; isto é, $p\mathbb{Z}_p$ é o único ideal máximo.
- Seja x em $\mathbb{Z}_p$ com $|x| = p^{-n}$, isto é, $x = p^n a$ com $|a| = 1$. Pela Proposição F.2, a em $\mathbb{Z}_p^*$, isto é, existe b em $\mathbb{Z}_p$ tal que $ab = 1$, ou, equivalentemente, $\mathbb{Z}_p x = p^{-n}\mathbb{Z}_p$. Concluímos que um ideal I em $\mathbb{Z}_p$ é gerado pelo seu elemento do mínimo valor, isto é, $I = p^n\mathbb{Z}_p$ onde p^n é a maior potência de p que divide todos os elementos em I.

- Pela Proposição F.2, só falta inverter p em $\mathbb{Z}_p$ para poder inverter todos os elementos em $\mathbb{Z}_p$. O corpo $\mathbb{Q}_p$ é o menor anel em que todos os elementos em $\mathbb{Z}_p$ são invertíveis, logo $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$. □

Por isso, se voltamos à definição de $\mathbb{Z}_p$ como conjunto de expansões p-ádicas infinitas,

$$\mathbb{Q}_p = \{p^{-n}a_{-n}p^{-n} + \cdots + a_0 + a_1p^1 + \cdots \text{ para } n \text{ em } \mathbb{N} \text{ e } a_{-n}, \ldots \in \{0, \ldots, p-1\}\}.$$

Observação. Duas séries iguais com parcelas racionais podem convergir a limites diferentes em $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{R}$. Por exemplo, com $\binom{x}{n} := x(x-1)\cdots(x-n+1)/n!$, a série dada por

$$\sqrt[2]{16/9} = (1+7/9)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (7/9)^n$$

converge à raiz positiva $4/3$ em $\mathbb{R}$ e a raiz negativa em $\mathbb{Q}_7$ (vide [Kob84, Capítulo IV, Prova do Non-Theorem 1])!

F.2. O Teorema de Ostrowski

Definição. Duas funções distância são *(Cauchy-)equivalentes* se elas têm as mesmas sequências de Cauchy. Isto é, duas funções distância d' e d'' sobre um conjunto X são equivalentes se para todo $\epsilon > 0$ existe δ tais que, para todos os x, y em X, se $d'(x,y) < \delta$ então $d''(x,y) < \epsilon$ e se $d''(x,y) < \delta$ então $d'(x,y) < \epsilon$

Observação. Dados dois valores absolutos $|\cdot|_{'}$ e $|\cdot|_{''}$ sobre um corpo, as métricas induzidas são (Cauchy-)equivalentes se, e somente se, existe um $c > 0$ tal que $|\cdot|_{''} = |\cdot|_{'}^{c}$.

O valor absoluto $|\cdot|$ é *trivial* se $|0| = 0$ e $|\cdot| = 1$ senão.

Teorema F.3 (Ostrowski). *Todo valor absoluto não-trivial sobre $\mathbb{Q}$ é (Cauchy-)equivalente*

- *ou ao valor absoluto usual $|\cdot|$,*
- *ou a um valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ para um número primo p.*

Demonstração: Seja $|\cdot|$ um valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$. Distinguimos dois casos, o caso *arquimediano* e *não-arquimediano.* Como $|-1| = 1$ e $|x/y| = |x|/|y|$, basta verificar sobre $\mathbb{N}$ que existe $\alpha > 0$ tal que $|\cdot|^\alpha$ é ou igual ao valor absoluto usual, ou a um $|\cdot|_p$ para p um número primo.

Caso arquimediano: Existe um n em $\mathbb{N}$ tal que $|n| > 1$.

Seja n_0 o menor tal n. (Por exemplo, se $|\cdot|$ é o valor absoluto usual, então $n_0 = 2$.) Como $|n_0| > 1$, existe $\alpha > 0$ tal que $|n_0| = n_0^\alpha$.

Expanda n na base n_0, isto é

$$n = a_0 + a_1 n_0 + \cdots + a_s n_0^s \quad \text{com } a_0, \ldots, a_s \text{ em } \{0, \ldots, n_0 - 1\}.$$

Segue

$$\begin{aligned} |n| &= |a_0 + a_1 n_0 + \cdots + a_s n_0^s| \\ &\leq |a_0| + |a_1||n_0| + \cdots + |a_s||n_0|^s \end{aligned}$$

Como a_0, …, $a_s < n_0$, pela escolha de n_0, vale $|a_0|$, …, $|a_s| \leq 1$. Segue

$$\begin{aligned} |a_0| + |a_1||n_0| + \cdots + |a_s||n_0|^s &\leq 1 + n_0^\alpha + \cdots + n_0^{\alpha s} \\ &= n_0^{s\alpha}(1 + n_0^{-\alpha} + \cdots + (n_0^{-\alpha})^s) \end{aligned}$$

Esta soma é limitada pela série geométrica: Pondo $c = n_0^{-\alpha} < 1$, vale

$$\begin{aligned} 1 + n_0^{-\alpha} + \cdots + (n_0^{-\alpha})^s &= 1 + c + \cdots + c^s \\ &\leq 1 + c + c^2 + \cdots = \frac{1}{1-c} =: \mathrm{C} \end{aligned}$$

com $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\alpha, n_0)$ independente de n. Como $n_0^s \leq n$, vale $|n| \leq n^\alpha \mathrm{C}$. Segue, para todo N em $\mathbb{N}$

$$|n|^{\mathrm{N}} = |n^{\mathrm{N}}| \leq (n^\alpha)^{\mathrm{N}} \mathrm{C},$$

extraindo a raiz de índice N

$$|n| \leq n^\alpha \sqrt[\mathrm{N}]{\mathrm{C}},$$

e como isto vale para N arbitrariamente grande

$$|n| \leq n^\alpha. \tag{$*$}$$

Para ver a desigualdade $|n| \geq n^\alpha$ oposta a $(*)$, observe

$$|n_0^{s+1}| = |n_0^{s+1} - n + n| \leq |n_0^{s+1} - n| + |n|,$$

e consequentemente, pela desigualdade obtida $(*)$,

$$|n| \geq |n_0^{s+1}| - |n_0^{s+1} - n| \geq n_0^{\alpha(s+1)} - (n_0^{s+1} - n)^\alpha.$$

Como $n_0^s \leq n \leq n_0^{s+1}$, segue

$$\begin{aligned}|n| &\geq (n_0^{s+1})^\alpha - (n_0^{s+1} - n_0^s)^\alpha \\ &= (n_0^{s+1})^\alpha \left(1 - (1 - \frac{1}{n_0})^\alpha\right) \geq n^\alpha \mathrm{D}\end{aligned}$$

com $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\alpha, n_0) := 1 - (1 - \frac{1}{n_0})^\alpha$ independende de n. Como acima, segue $|n| \geq n^\alpha$ concluindo com $(*)$ que $n = n^\alpha$ e assim o caso arquimediano.

Caso não-arquimediano: Para todos os n em $\mathbb{N}$ vale $|n| \leq 1$.

Como $|\cdot|$ não é trivial, existe n em $\mathbb{N}$ tal que $n < 1$. Seja n_0 o menor tal n. Como $|\cdot|$ é multiplicativo, necessariamente $n_0 = p$ primo.

Proposição: Para todo número primo $q \neq p$ vale $|q| = 1$.

Demonstração: Caso contrário, existe N tal que $|q^\mathrm{N}|, |p^\mathrm{N}| < 1/2$. Pelo Teorema H.1, os números q^N e p^N são relativamente primos se, e somente se, $\langle q^\mathrm{N} \rangle + \langle p^\mathrm{N} \rangle = \langle 1 \rangle$, isto é, existem m, n tais que

$$mq^\mathrm{N} + np^\mathrm{M} = 1.$$

Segue a contradição

$$1 = |1| = |m||q^\mathrm{N}| + |n||p^\mathrm{M}| < 1/2 + 1/2 = 1.$$

Seja x em $\mathbb{N}$. Se $x = p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r}$ é a fatoração em números primos e $p_{i_0} = p$, então $|x| = |p_{i_0}|^{x_{i_0}}$. Isto é, $|x| = c^{v_p(x)}$ com $c = |p|$ e $v_p(x)$ = o maior n tal que p^n divide x.

Se escolhemos α tal que $c = |p| = |p|_p^\alpha = p^{-\alpha}$, isto é $\alpha = -\log_p |p|$, então concluímos que $|x| = |x|_p^\alpha$. □

Recordemo-nos de que um anel, ou corpo, com um valor absoluto um anel, ou corpo, é chamado *normado*.

Corolário. *Temos*

$$\begin{aligned}&\{\ \textit{completamentos (normados) do corpo } \mathbb{Q}\ \} \\ =&\{\mathbb{R}\} \cup \{\ \textit{todos os } \mathbb{Q}_p \textit{ para } p \textit{ um número primo}\ \}.\end{aligned}$$

Demonstração: Segue da definição do completamento de um espaço métrico. □

G. Aritmética Modular

Denotem

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}$$

os *anéis* dos números inteiros e dos números reais (= a reta).

Um **anel** (comutativo com 1) é

- um conjunto que possui
  - **0** (= o elemento neutro da adição), e
  - **1** (= o elemento neutro da multiplicação);
- sobre o qual operam
  - a **adição** + (e o seu *inverso* −), e
  - a **multiplicação** ·,

  que satisfazem a lei *associativa*, *comutativa* e *distributiva*.

G.1. Aritmética Modular no dia-a-dia

Damos exemplos da aritmética modular do nosso dia-a-dia (como o relógio, os dias da semana, ou até o alfabeto). A propriedade comum entre estes exemplos é a sua circularidade (de onde a nomenclatura “anel”).

Relógio. O exemplo protótipo de aritmética modular é a aritmética do relógio em que o ponteiro volta após 12 horas no início; isto é, vale a equação

$$12 = 0,$$

que implica, entre outros, as equações

$$9 + 4 = 1 \quad \text{e} \quad 1 - 2 = 11; \quad (*)$$

Quer dizer, 4 horas depois das 9 horas é 1 hora, e 2 horas antes da 1 hora são 11 horas. Podemos ir mais longe:

$$9 + 24 = 9, \quad (**)$$

quer dizer se agora são 9 horas, então 24 horas (= um dia) mais tarde também.

Figura G.1: Relógio como Anel dos números $1, 2, \ldots, 11, 12 = 0$

Dias da Semana. Além das horas, outro exemplo do aritmética modular no dia-a-dia são os dias da semana: tendo passado 7 dias, os dias da semana recomeçam. Se numeramos `sábado`, `domingo`, `segunda`, `terça`, `quarta`, `quinta` e `sexta-feira` por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 então vale a equação

$$7 = 0,$$

e que implica, entre outros, as equações

$$4 + 4 = 1 \quad \text{e} \quad 1 - 2 = 5;$$

Quer dizer, 4 dias depois da quarta-feira é domingo, e 2 dias antes do domingo é sexta-feira. Podemos ir mais longe: $5 + 14 = 5$, quer dizer se agora é `quinta-feira`, então daqui em 14 dias (= duas semanas) também.

A cifração de César. Na cifração de César, trasladamos cada letra do alfabeto por uma distancia t fixa; por exemplo, para $t = 3$, obtemos

$$\mathrm{A} \mapsto \mathrm{D}, \mathrm{B} \mapsto \mathrm{E}, \ldots, \mathrm{W} \mapsto \mathrm{Z}.$$

Para trasladarmos as últimas $t = 3$ letras X, Y e Z do alfabeto, consideramos o alfabeto como anel, isto é:

Figura G.2: A circularidade semanal de tomar comprimidos

Assim,

$$X \mapsto A, \ldots, Z \mapsto C.$$

Se identificamos cada letra do alfabeto romano com a sua posição,

$$A \mapsto 0, B \mapsto 1, \ldots, X \mapsto 23, Y \mapsto 24, Z \mapsto 25.$$

então vale $23 + 3 \mapsto 0$, $24 + 3 = 1$ e $25 + 3 = 2$; isto é, $26 = 0$.

Formalização. Formalmente, derivamos as equações em $(*)$ e $(**)$ das igualdades

$$9 + 4 = 13 = 12 + 1 = 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad 1 - 2 = -1 = -1 + 0 = -1 + 12 = 11.$$

e

$$9 + 24 = 9 + 2 \cdot 12 = 9 + 2 \cdot 0 = 9.$$

Em geral, para quaisquer a e x em $\mathbb{Z}$,

$$a + 12 \cdot x = a$$

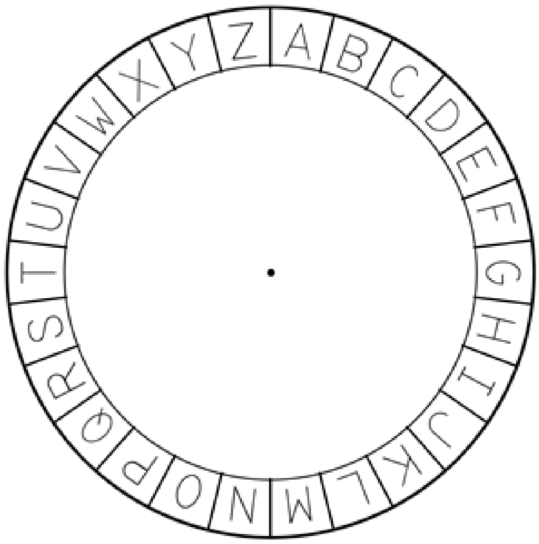

Figura G.3: Roda das Letras do Alfabeto Latino

ou, equivalentemente, para quaisquer a e b em $\mathbb{Z}$,

$$a = b \quad \text{se } 12 \mid a - b.$$

Em palavras, a e b deixam o mesmo resto divido por 12.

As mesmas observações valem para os dias da semana.

Não há nada de especial sobre o número $m = 12$ (horas até meio-dia), $m = 7$ (dias da semana) ou $m = 26$ (letras do alfabeto latino). Por exemplo, as mesmas observações valeriam se o relógio indicasse $m = 15$ horas (como no planeta Netuno em que o dia, a rotação completa em torno do próprio eixo, dura 16 horas):

Definição. Seja $m \geq 1$ um inteiro. Os números inteiros a e b são **congruentes módulo** m ou, em fórmulas,

$$a \equiv b \bmod m.$$

se $m \mid a - b$, isto é se a sua diferença $a - b$ é divisível por m. Em outras palavras, se a e b deixam o mesmo resto divido por m. O número m é o **módulo**.

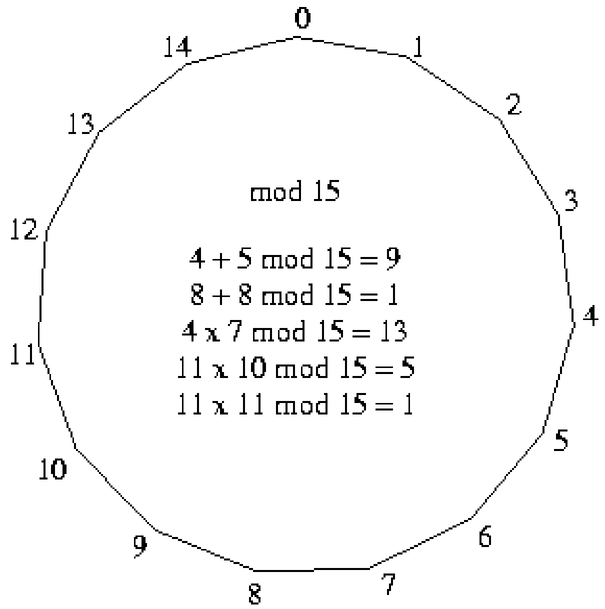

Figura G.4: O relógio com 15 horas

G.2. O Anel Quociente

Dado um número inteiro m, construiremos de duas vias, primeiro pela teórica e depois pela prática,

- o **menor** anel (= conjunto que possui 0 e 1 e sobre o qual + e $\cdot$ operam), denotado por $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,
- com **uma aplicação** $\bar{\cdot} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ denotada por

  $$x \mapsto \bar{x}$$

  que **satisfaz**

  $$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

  (e portanto $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, em particular, $\bar{0} = 0$ e $\bar{1} = 1$), e
- tal que

  $$x \mapsto 0 \iff m \mid x \qquad (\dagger)$$

  ou, equivalentemente,

  $$x \equiv y \bmod m \iff \bar{x} = \bar{y} \text{ em } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Explicamos o que significa o *menor* anel que satisfaz as propriedades precedentes. Com efeito, menor não tem significado matemático. Em verdade, falamos matematicamente de uma propriedade *universal:* Se A é outro anel com uma aplicação $\pi\colon \mathbb{Z} \to A$ que satisfaz (†), isto é, tal que $\pi(x) = 0$ se, e tão somente se, $m \mid x$, então existe uma (com efeito, única) aplicação $\phi\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$ tal que $\pi = \phi \circ \bar{\cdot}$. (Diz-se que a aplicação π *fatora* através de $\bar{\cdot}$.)

Construção *Teórica*. Esta construção do anel residual é a ordinariamente dada, como conjunto de classes residuais: Pela Equação (†) exatamente o conjunto $m\mathbb{Z} \mapsto 0$, e consequentemente para x em $\mathbb{Z}$ qualquer, exatamente os seus traslados

$$x + m\mathbb{Z} \mapsto \bar{x}.$$

Isto nos leva a definir

- como **conjunto**

  $$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{x + m\mathbb{Z} : x \text{ em } \mathbb{Z}\}$$

  e como **aplicação** $\bar{\cdot}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

  $$x \mapsto x + m\mathbb{Z};$$

- como **elementos neutros** da adição e multiplicação

  $$0 = 0 + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 1 = 1 + m\mathbb{Z};$$

- como **operações** + e ·

  $$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y} \quad \text{e} \quad \bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{x \cdot y}.$$

Os elementos (ou números) em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ são subconjunto de $\mathbb{Z}$, com efeito *classes residuais.*

Construção *Prática*. Esta definição reflete melhor o nosso ponto de vista intuitivo da aritmética modular, por exemplo, sobre o relógio, isto é, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: Pela divisão com resto,

$$\{x + m\mathbb{Z} : x \text{ em } \mathbb{Z}\} = \{0 + m\mathbb{Z}, \ldots, m - 1 + m\mathbb{Z}\},$$

isto é, $0, \ldots, m - 1$ representam o conjunto $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Por isso definamos

- como **conjunto**
$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{0, \ldots, m-1\};$$
e como **aplicação** $\bar{\cdot}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
$$x \mapsto r \quad \text{onde } x = qm + r \quad \text{com } r \text{ em } \{0, \ldots, m-1\};$$
- como **elementos neutros** da adição e multiplicação 0 e 1,
- como **operações** + e ·
$$x + y := r \quad \text{onde } x + y = qm + r \quad \text{com } r \text{ em } \{0, \ldots, m-1\}$$
e
$$x \cdot y = r \quad \text{onde } x \cdot y = qm + r \quad \text{com } r \text{ em } \{0, \ldots, m-1\}.$$

Por exemplo, as tabelas da adição e multiplicação para $m = 4$ são:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

e

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Exercício G.1. Mostre que um número inteiro é divisível por 3 (respectivamente 9) se, e tão somente se, a soma dos seus algarismos decimais é divisível por 3 (respectivamente 9).

G.3. Números Invertíveis

Em $\mathbb{Z}$, os únicos números que dividem todos são ±1. Em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, depende do módulo m se todos os seus elementos podem ser divididos

- só pelas imagens dos números invertíveis ±1 em $\mathbb{Z}$, ou

- por todos os números (exceto 0).

Um número que divide todos os outros é uma *unidade:*

Definição G.2 (Unidades). O elemento $\bar{x}$ em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ é uma **unidade** se existe $\bar{y}$ em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tal que

$$\bar{y}\bar{x} = 1.$$

*O elemento $\bar{y}$ é o **inverso** de $\bar{x}$ e denotado por $\bar{x}^{-1}$.* Denotamos

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* := \{ \text{ as unidades em } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}.$$

Por exemplo, a tabela de multiplicação de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mostra que

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1,3\}.$$

pois $1 \cdot 1 = 1$ e $3 \cdot 3 = 1$; ao contrário, 2 não é uma unidade.

Definição. Os números inteiros a e b são **relativamente primos** se

$$\text{mdc}(a,b) = 1,$$

isto é, se nenhum número inteiro (fora 1) divide a e b.

Proposição G.3 (Caracterização de Unidades). *Dado um número inteiro x, sua imagem*

$$\bar{x} \textit{ é } \textbf{unidade} \textit{ em } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff x \textit{ e } m \textit{ são } \textbf{relativamente primos}.$$

Por exemplo, $\text{mdc}(1,4) = \text{mdc}(3,4) = 1$, mas $\text{mdc}(2,4) = 2$. Pela proposição, concluímos que em $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ são unidades 1 e 3, mas 2 não é.

Demonstração (da Caracterização de Unidades):: Pelo **Algoritmo de Euclides Estendido**, existe u e v em $\mathbb{Z}$ tais que

$$ux + vm = \text{mdc}(x,m).$$

Então $\text{mdc}(x,m) = 1$ se, e tão somente se, existe u em $\mathbb{Z}$ tal que

$$ux \equiv 1 \bmod m$$

ou, equivalentemente,

$$\bar{u}\bar{x} = 1 \quad \text{em } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Isto é, $\bar{x}$ é uma **unidade** em $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. □

Corolário G.4. Se p é um número primo, então

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \{1, \ldots, p-1\}.$$

Isto é, todos os elementos, exceto 0*, são unidades.*

Demonstração: Se p é primo, então $\mathrm{mdc}(x,p) = 1$ para $x = 1, \ldots, p-1$. □

Recordemo-nos de que um **corpo** é um anel cujos números são todos unidades ($\neq 0$). Isto é, um anel em que se pode dividir por qualquer número ($\neq 0$). Para um número primo p, pelo Corolário, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um corpo, o **corpo com p elementos**, denotado por

$$\mathbf{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

G.4. Teorema Chinês dos Restos

Teorema G.5. *Se m e n são coprimos, isto é* $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$*, então*

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Demonstração: Olha a aplicação natural

$$\pi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

e observa que $\pi(x) = 0$ se, e tão somente se, $x \equiv 0 \bmod m$ e $x \equiv 0 \bmod n$, isto é, se, e tão somente se, $\mathrm{mmc}(n,m) = nm$ divide x. Logo o seu núcleo é $nm\mathbb{Z}$, e a aplicação induzido

$$\pi \colon \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

é injetora.

Como m e n são relativamente primos existem pelo **Algoritmo de Euclides Estendido** i e j em $\mathbb{Z}$ tal que $im + jn = 1$. Como a imagem é um ideal sobre $\mathbb{Z}$, para mostrar que a aplicação é sobrejetora, é suficiente mostrar que os seus geradores $(1,0)$ e $(0,1)$ são valores. Calculemos

$$jn \equiv im + jn = 1 \bmod m \quad \text{e} \quad jn \equiv 0 \bmod n$$

e

$$im \equiv 0 \bmod m \quad \text{e} \quad im \equiv im + jn = 1 \bmod n.$$

H. Divisão com Resto e o Algoritmo de Euclides

Sejam a e b números inteiros. O número b **divide** a ou, em fórmulas, $b \mid a$, se

$$\text{existe um número inteiro } c \text{ tal que } a = bc.$$

Por exemplo, um número inteiro, é *par* ou *ímpar* se é divisível por 2 ou não.

Definição. Um número $p > 1$ é **primo** se somente 1 e p dividem p.

$$\{ \text{ números primos } \} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, \ldots\}.$$

H.1. Divisão com Resto

Sejam a e b números inteiros positivos. Que a **dividido por** b tem **quociente** q e **resto** r significa

$$a = b \cdot q + r \quad \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Por exemplo, para $a = 230$ e $b = 17$, calculamos

$$230 = 17 \cdot 13 + 9.$$

Isto é, 230 *divido por* 17 tem *quociente* 13 e *resto* 9.

Para dois números inteiros a e b,

$$\textbf{divisor comum} = \textbf{número inteiro positivo que divide } a \textbf{ e } b.$$

O **maior** divisor comum de a e b é o **maior** número inteiro positivo que divide a e b. Denote

$$\mathrm{mdc}(a, b) := \text{ o maior divisor comum de } a \text{ e } b \text{ }.$$

Por exemplo,

$$\{ \text{ divisores comuns de 24 e } 26\} = \{2, 3, 4, 6, \mathbf{12}\}$$

e

$$\mathrm{mdc} = \text{ o maior divisor comum } = 12.$$

H.2. Computar o Maior Divisor Comum pelo Algoritmo de Euclides

Sejam a e b números inteiros positivos tal que $a \geq b$ e com

$$a = b \cdot q + r \quad \text{com } 0 \leq r < b. \qquad (\dagger)$$

Equação ($\dagger$) $\implies$ $d \mid a,b$ se, e tão somente se, $d \mid b,r$, $\implies$

$$\{\text{divisores comuns de } a \text{ e } b\} = \{\text{divisores comuns de } b \text{ e } r\},$$

em particular

$$\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,r).$$

Reaplicando a divisão com resto aos números menores b e r,

$$b = r \cdot q' + r' \quad \text{com } 0 \leq r' < r$$

e por isto

$$\text{mdc}(b,r) = \text{mdc}(r,r').$$

Iterando, chegamos a $s := r^{'\cdots'}$ e $r^{'\cdots''}$ com $r^{'\cdots''} = 0$, isto é

$$\text{mdc}(a,b) = \ldots = \text{mdc}(s,0) = \mathbf{s}.$$

Por exemplo, calculamos o maior divisor comum de $a = 748$ e $b = 528$ pela iterada divisão com resto:

$$\begin{aligned} 748 &= 528 \cdot 1 + 220 \\ 528 &= 220 \cdot 2 + 88 \\ 220 &= 88 \cdot 2 + \mathbf{44} \\ 88 &= 44 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

logo $\text{mdc}(528,220) = 44$. Isto é,

$$\text{o maior divisor comum} = \text{o penúltimo resto}.$$

Teorema (Algoritmo de Euclides). Sejam a e b números inteiros positivos com $a \geq b$. O seguinte algoritmo calcula $\text{mdc}(a,d)$ em um número finito de passos:

*(*inicialização*) Põe $r_0 = a$ e $r_1 = b$, e $i = 1$.*
*(*divisão com resto*) Divide r_{i-1} por r_i com resto para obter*

$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \quad \textit{com } 0 \leq r_{i+1} \leq r_i.$$

*(*iteração*) Distingue entre:*

- *ou $r_{i+1} = 0$, então $r_i = \text{mdc}(a,b)$ e o algoritmo termina,*
- *ou $r_{i+1} > 0$, então ponha $i := i + 1$ e continue no passo (*divisão com resto*).*

H.3. Algoritmo de Euclides Estendido = Computar o Maior Divisor Comum como Combinação Linear

Para números inteiros $v_1, \ldots, v_d$, uma **combinação linear** de $v_1, \ldots, v_d$ é uma soma s de múltiplos inteiros deles,

$$s = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d \quad \text{com inteiros } \lambda_1, \ldots, \lambda_d.$$

O *Algoritmo de Euclides Estendido* mostra iterativamente que

$$\textbf{maior divisor comum} \text{ de } a \text{ e } b \ = \ \textbf{combinação linear} \text{ de } a \text{ e } b \ .$$

Teorema H.1 (O algoritmo de Euclides Estendido). *Para quaisquer números inteiros positivos a e b, o seu maior divisor comum* $\mathrm{mdc}(a,b)$ *é uma combinação linear de a e b; isto é, existem números inteiros u e v tais que*

$$\mathrm{mdc}(a,b) = au + bv.$$

Demonstração: Inicialmente, com $r_0 := a$, $r_1 := b$,

$$r_0 = r_1 q_i + r_2 \quad \text{com } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Isto é, $r_2 = r_0 - r_1 q_1$, $\implies$

$$r_0, r_1, \text{ e } r_2 = \text{ combinações lineares de } a \text{ e } b \ .$$

Por indução,

$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \quad \text{com } 0 \leq r_{i+1} \leq r_i.$$

Como r_{i-1} e r_i são combinações lineares de a e b,

$$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i = \text{ uma combinação linear de } a \text{ e } b \ .$$

Em particular, quando finalmente $r_{I+1} = 0$,

$$r_I = \mathrm{mdc}(r_I, r_{I+1}) = \mathrm{mdc}(a,b) = \text{ combinação linear de } a \text{ e } b \ .$$

Já calculamos o maior divisor comum de $a = 748$ e $b = 528$,

$$\begin{aligned} 748 &= 528 \cdot 1 + 220 \\ 528 &= 220 \cdot 2 + 88 \\ 220 &= 88 \ \cdot 2 + \mathbf{44} \\ 88 &= 44 \ \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
220 &= 748{-}528{\cdot}1 = a - b \\
88 &= 528{-}220{\cdot}2 = b - (a - b)2 = 3b - 2a \\
\mathbf{44} &= 220{-}88\ \ {\cdot}2 = (a - b) - (3b - 2a)2 = 5a - 7b,
\end{aligned}
$$

e, com efeito,

$$44 = 5 \cdot 748 - 7 \cdot 528.$$

Referências

[Ahl78] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197.

[Car61] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Avec le concours de Reiji Takahashi, Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961. MR 0147623.

[Car95] ———, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover Publications, Inc., New York, 1995, Translated from the French, Reprint of the 1973 edition. MR 1348633.

[Con95] J. B. Conway, *Functions of one complex variable II*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 159, Springer New York, 1995. MR 1344449. DOI 10.1007/978-1-4612-0817-4.

[Haz02] M. Hazewinkel, *Rectifiable curve. Encyclopedia of Mathematics*, 2002. Confer `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Rectifiable_curve&oldid=29205`.

[Hil93] D. Hilbert, *Ueber die transcendenz der zahlene und ?*, Math. Ann. **43** (1893), no. 2-3, 216–219. MR 1510808. DOI 10.1007/bf01443645.

[Kob84] N. Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 58, Springer New York, 1984. MR 754003. DOI 10.1007/978-1-4612-1112-9.

[Lim81] E. L. Lima, *Curso de Análise. Vol. 2*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 13, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981 (Portuguese). MR 654862. zbMATH 0511.26003.

[Mur15] J. T. Murphy, *An Elementary Proof Of Rademacher's Theorem.*

[Niv47] I. Niven, *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), no. 6, 509–510. MR 0021013. DOI 10.1090/s0002-9904-1947-08821-2.

[PGS09] C. Perez-Garcia and W. Schikhof, *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119, Cambridge University Press, 2009. MR 2598517. DOI 10.1017/cbo9780511729959.

[San18] G. Sanderson, *Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem*, 2018. Confer `https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls`.

[Sch02] P. Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2002. MR 1869547. DOI 10.1007/978-3-662-04728-6.