Cálculo Infinitesimal para Aplicações

Curso de Graduação

Enno Nagel

UFAL, Maceió — Inverno 2018

Sumário

Introdução

Veremos como uma função será descrita por seu *gráfico*, uma curva, no plano cartesiano.

O *cálculo*, mais exatamente o cálculo *infinitesimal* estuda a aproximação a valores reais; por exemplo:

- a inclinação do gráfico de uma função em um ponto (= inclinação da *reta tangente*, isto é, da reta que toca o gráfico, e que pode ser calculada pela primeira *derivada* da função) pelas inclinações de retas secantes (= as retas que intersectam o gráfico em dois pontos) cujos pontos de interseção se aproximam mais e mais, e

- a área entre a curva e o eixo-x (= a *integral*) pela área somada de retângulos, ou fitas, mais e mais finas.

Intuitivamente, a diferença diminui e diminui até ficar infinitamente pequena, *infinitesimal*.

Queremos entender como as noções *abstratas*, por exemplo, a derivada e a integral, descrevem a *geometria* do gráfico, neste caso, as suas tangentes e a sua área. Isto é, como as equações se traduzem para conceitos *geométricos:* Por exemplo,

- às da reta tangente e das retas secantes para aproximá-la,

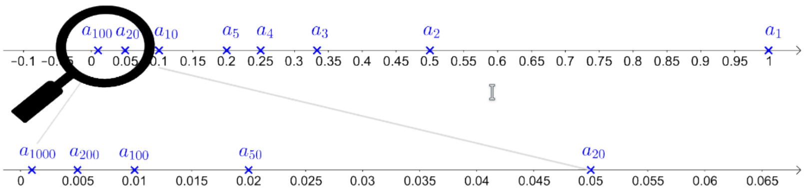
- a integral como área circundada pelo gráfico e o eixo-x, e a soma das áreas de retângulos nela para aproximá-la,

Além disso, como conceitos *físicos* se traduzem para conceitos geométricos, por exemplo, se $f(t)$ significa posição no tempo t, então

- a primeira derivada $f'(t)$ significa a *velocidade* momentânea no tempo t, e

- a sua segunda derivada $f''(t)$ significa a *aceleração* momentânea no tempo t.

O fulcro do nosso curso será a noção do *limite* de uma sequência infinita: Um valor real a, de que pensamos como um ponto na reta, aproximado por valores reais $a_1, a_2, \ldots$, de que pensamos como pontos na reta que se acumulem em torno de a: Isto é, em cada intervalo $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ arbitrariamente pequena em torno de a estão quase todos os pontos da sequência, isto é, todos exceto um número finito.



O limite de $a_n = 1/n$ como ponto de acumulação na reta em torno de $a = 0$

Links

Lembremo-nos de que, mesmo se o link `URL` expirou, o conteúdo é ainda disponível pelo `archive.org` sob o endereço `https://web.archive.org/web/URL`. Por exemplo, a animação da aproximação a uma integral por fitas mais e mais finas `https://mathinsight.org/calculating_area_under_curve_riemann_sums` permanecerá disponível sob `https://web.archive.org/web/https://mathinsight.org/calculating_area_under_curve_riemann_sums` . Neste caso, a página foi arquivada no dia 6 de outubro 2018; o seu estado nesta data continua a estar disponível em `https://web.archive.org/web/20181006085936/https://mathinsight.org/calculating_area_under_curve_riemann_sums` .

Provas

Sejamos confinantes quanto às provas, pois quem domina a matéria passará com facilidade. A prova aprovada é apenas um certificado, isto é, garante este domínio para terceiros (além do aluno e do professor).

Se reprovar, será necessário tirar na prova da reavaliação uma nota melhor do que as nas provas anteriores. Por isso, será necessário dominar, pelo menos parcialmente, o que não dominamos nas provas anteriores. Isto é, poder responder às questões às quais não conseguimos responder com firmeza nas provas anteriores.

Pré-requisitos

Notações

Lembremo-nos das notações

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ para os *números naturais*.
- $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ para os *números inteiros*,
- $\mathbb{Q} = \{x/y$ para x, y em $\mathbb{Z}\}$ para os *números racionais*, por exemplo, $2/3$ é um número real, e
- $\mathbb{R} = \{a_N 10^N + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots\}$ com a_N, $\ldots$, a_1, a_0, a_{-1} $\ldots$, em $\{0, 1, \ldots, 9\}$ para os *números reais*; por exemplo, $\pi = 3{,}14159\ldots$ é um número real.

Os *números irracionais* são todos os números reais que não são racionais, dados pelo conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercício.

- Um número real no dia-a-dia é escrito em notação decimal

$$a_N \ldots a_1 a_0, a_{-1} \ldots$$

com a_N, $\ldots$, a_1, a_0, a_{-1} $\ldots$, em $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Expande-a, isto é, escreve-a como soma em potências de 10, para cinco números reais com seis algarismos diferentes e uma virgula. Por exemplo,

$$321{,}34 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

- Como detetar se um número real é racional pela sua expansão decimal?

Potenciação e Radiciação

Enquanto $(ab)^c = a^c b^c$, não vale $(a+b)^c = a^c + b^c$! Com efeito, por exemplo, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$, a fórmula binomial.

Igualmente, como $\sqrt[c]{x} = x^{1/c}$, tampouco vale $\sqrt[c]{a+b} = \sqrt[c]{a} + \sqrt[c]{b}$!

1. Funções

Introduzamos o conceito de uma função (real).

1.1. Definição e Exemplos

Uma função permite descrever a dependência entre duas quantidades, por exemplo, na física ou na economia. Uns exemplos:

Exemplo.

(i) A distância s percorrida por um objeto na queda livre depende do tempo da queda t: vale $s = g \cdot t^2$ onde $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ é a constante da aceleração gravitacional da terra.

(ii) A forca de atração K entre duas massas m' e m'' depende de m', m'' e a distância r entre elas: pela lei gravitacional de Newton $\mathrm{K} = \mathrm{G}(m'm'')/r^2$ onde $\mathrm{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ é a constante de gravidade universal de Newton.

(iii) A função fatorial $f(n) = n! = n(n-1)\cdots 1 =$ o número de permutações de n objetos.

(iv) O preço de uma entrada ao teatro de fantoches depende do número da fila do assento: Esta dependência se descreve por uma tabela de preços, dando o número da fila 1,2,3, ... e o preço correspondente de 100 Centavos, 20 Centavos, 5 Centavos, ...

Definição. Uma função f é uma regra que associa a cada elemento x de um conjunto D exatamente um elemento y de um conjunto I.

Esta associação é simbolicamente expressa por $y = f(x)$.

Referimo-nos

- de x como *variável (independente)* ou *argumento*,

- de y como *variável dependente* ou *valor (da função)*,
- de D como *domínio* da função, e
- de I como *imagem* da função, o conjunto de todos os valores de f; por exemplo, $\mathrm{I}\sin = [-1{,}1]$ e $\mathrm{I}f = \{c\}$ para a função constante $f \equiv c$.

Frequentemente, uma função é denotada por $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ onde C é o *contra-domínio* de f. O contra-domínio é um conjunto que contém a imagem, mas não necessariamente coincide com ela.

Nos nossos exemplos:

(i) Aqui (a magnitude) de $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $f(t) = s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Tem-se $\mathrm{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathrm{I} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) Aqui (a magnitude) de $m', m'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Tem-se $\mathrm{D} = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathrm{I} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(iii) Aqui $n \in \mathbb{N}$ e $n! \in \mathbb{N}$; temos $\mathrm{D} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e $\mathrm{I} = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$.

(iv) Aqui $\mathrm{D} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{I} = \{100, 20, 5\}$.

No que se segue, olhamos exclusivamente funções com $\mathrm{D}, \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, isto é, *funções reais.* Como nos restringimos a estas funções, chamamo-las simplesmente de funções. As letras $a, b, c, \ldots, r, s, t, u, x, y, z$ denotem números reais; as letras i, j, k, l, n, m denotem números naturais (usados para enumerações).
Funções reais aparecem em diversas formas:

- Na forma de uma *equação* como nos exemplos acima: Isto é,

  $$y = f(x),$$

  por exemplo, $y = x^2, \sin x \ldots$ Para facilitar, fazemos o convénio seguinte: Se escrevemos somente a regra de associação, por exemplo,

  $$f(x) = \frac{1}{x(x-3)} \quad \text{ou} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

  então o domínio é o subconjunto máximo de $\mathbb{R}$ para que esta regra seja definida (quer dizer, faça sentido). Por exemplo, nestes exemplos, $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{0{,}3\}$ e $\mathrm{D} = [0, \infty[$ (com $\mathrm{I} = [-4/9, 0[\cup]0, \infty[$ e $\mathrm{I} = [0, \infty[$).

- Na forma de uma *tabela* de valores: Por exemplo, um experimento mede a tensão U de um resistor em dependência da corrente I. Os resultados são notados em Tabela 1.1 que tem duas linhas,
  - na primeira, entradas de valores de corrente I = 50, 100, 150 ... mA, e
  - na segunda, para cada corrente, o valor da tensão U = 2, 4, 6 ... V medido.

50	100	150	...
2	4	6	...

Tabela 1.1.: Tabela de Valores Medidas num experimento

  Aqui $D = \{50,100,\ldots\}$ (e $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$). (Gostaríamos de extrapolar esta função, isto é, estender o seu domínio a $\mathbb{R}_{\geq 0}$; a este fim, parece provável que $U = RI$ com $R = 0{,}04\Omega$.)

- Na forma de *gráficos:* A equação funcional $y = f(x)$ associa a cada valor x um único valor y, em símbolos, $x \mapsto y = f(x)$. Como mostra Figura 1.1, um tal par de valores $(x_0;y_0)$ pode ser interpretado como ponto P no plano cartesiano ([P, Página 139]) com os seu eixo-x, a *abcissa*, e o seu eixo-y, a *ordenada*. Para cada par de valores (x_0,y_0) obtemos exatamente um ponto. Dado um ponto P, os números reais x_0 e y_0 são chamados das *coordenadas (cartesianas)*. O conjunto de todos os pontos $(x, y = f(x))$ forma o *gráfico* da função (ou a sua *curva*) que ilustra o percurso dos valores da função $y = f(x)$. Por exemplo,
  - o gráfico da função $y = x^2$ é uma parábola, e
  - o da função $y = ax + b$ uma reta.

  Para desenhar a curva:

  (i) Enche uma tabela de valores para uns argumentos x', x'', ...

  (ii) Desenha os pontos dados nela, e

  (iii) Conecta-os para obter o percurso da curva da função.

  Um site para desenhar as curvas de funções é `http://fooplot.com`.

A partir de duas funções f e g (sobre quaisquer domínios e imagens) pode ser obtida outra por *concatenação*; a *função composta* ou a *composição* $g \circ f$,

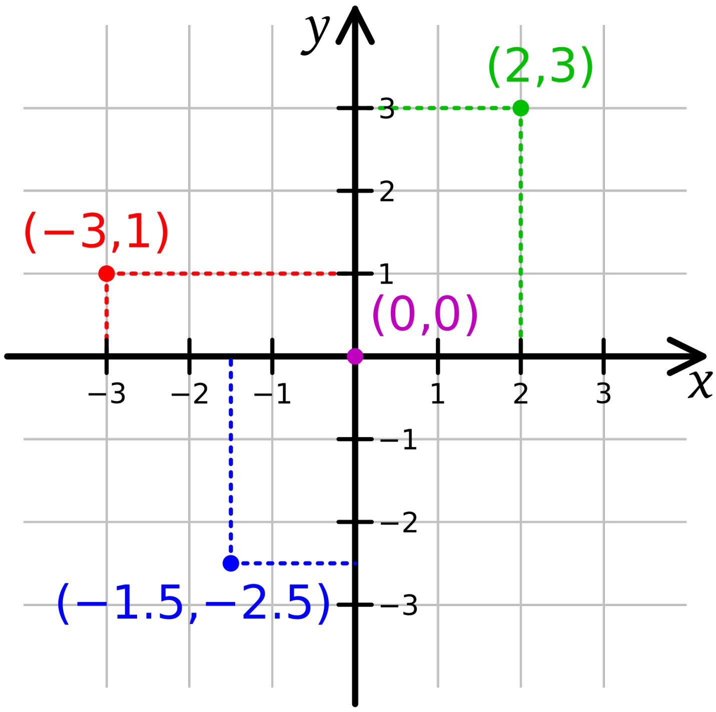


Figura 1.1.: Localizar um ponto pelas suas coordenadas cartesianas

dado que a imagem de f é contida no domínio de g, isto é, $\mathrm{I}(f) \subseteq \mathrm{D}(g)$. É definida por

$$g \circ f : x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)),$$

simbolicamente, para obter $g \circ f(x) = g(f(x))$, substituímos x em $g(x)$ por $f(x)$.

1.2. Monotonia de funções

Gostaríamos de inverter funções. Se isto é possível depende da *monotonia* da função.

Definição. Seja $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{I}$ uma função e $x' < x''$ em D. A função

- *cresce monotonamente*, se $f(x') \leq f(x'')$,

- *cresce de modo estritamente monótono*, se $f(x') < f(x'')$,
- *decresce monotonamente*, se $f(x') \geq f(x'')$,
- *decresce de modo estritamente monótono*, se $f(x') > f(x'')$.

Isto é, para uma função monotonamente crescente, ao argumento menor/maior x corresponde o valor menor/maior y; é o oposto para uma função monotonamente decrescente ([P, Página 144]).

Exemplo 1.1. [P, Página 145] Funções monotonamente crescentes são: (i) Toda reta com inclinação positiva. (ii) A parábola cúbica. Funções monotonamente decrescentes são:

(i) Toda reta com inclinação negativa.

(ii) Decaimento radioativo: o número n de núcleos atómicos decresce exponencialmente com o tempo percorrido t.

(iii) Descarga de um condensador: A tensão U decresce exponencialmente com o tempo percorrido t.

A parábola $y = x^2$ é sobre $\mathbb{R}$ é nem monotonamente crescente, nem monotonamente decrescente. Porém, restrita

- ao intervalo $x \geq 0$, cresce de modo estritamente monótono, e
- ao intervalo $x \leq 0$, cresce de modo estritamente monótono.

1.3. Inversão de funções

Por definição, uma função $f(x)$ associa a cada argumento $x \in \mathrm{D}$ exatamente um valor $y \in \mathrm{I}$. Frequentemente surge o problema inverso: Dado um valor y, determina o seu argumento x sob f, isto é, tal que $y = f(x)$. Se $x' \neq x''$ implica $f(x') \neq f(x'')$, isto é, a argumentos diferentes são associados valores diferentes, então a cada valor y é associado um único argumento x. Uma função $y = f(x)$ com esta propriedade é dita *invertível* (ou também *injetora*).

Pelo Teorema de Valor Intermediário (a ser apresentado), temos o seguinte critério para a invertibilidade de uma função: Uma função contínua (a ser definida) é invertível, se, e tão-somente se, ela é *estritamente* monótona (crescente ou decrescente). (Na prática, todas as funções que encontraremos serão contínuas.)

Se uma função $f(x)$ é invertível, então a cada valor $y \in \mathrm{I}$ é associado um único argumento $x \in \mathrm{D}$. A função $g\colon \mathrm{I} \to \mathrm{D}$ obtida pela associação inequívoca $y \mapsto x$ é a *função inversa* ou o *inverso* de $f(x)$ ([P, Página 149]) e denotada por $y = f^{-1}(x)$. Ora, y é a variável *independente* e x a variável *dependente*. Em fórmulas, a função inversa g é obtida pela permutação das duas variáveis x e y na equação $y = f(x)$.

Matematicamente, a função f tem o inverso $g = f^{-1}$, se $g(f(x)) = x$ e $f(g(x)) = x$. Por exemplo, sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$ vale $\sqrt{(x^2)} = x = (\sqrt{x})^2$ para $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$, e $(2x+1)/2 - 1/2 = x = 2(x/2 - 1/2) + 1$ para $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x/2 - 1/2$.

Para desenhar a função função inversa, poderíamos permutar as designações dos dois eixos. Porém, isto comumente não se faz. Em vez disto, o gráfico da função inversa $g = f^{-1}$ é o espelhamento do gráfico da função invertida f na diagonal $y = x$ como mostra Figura 1.2.

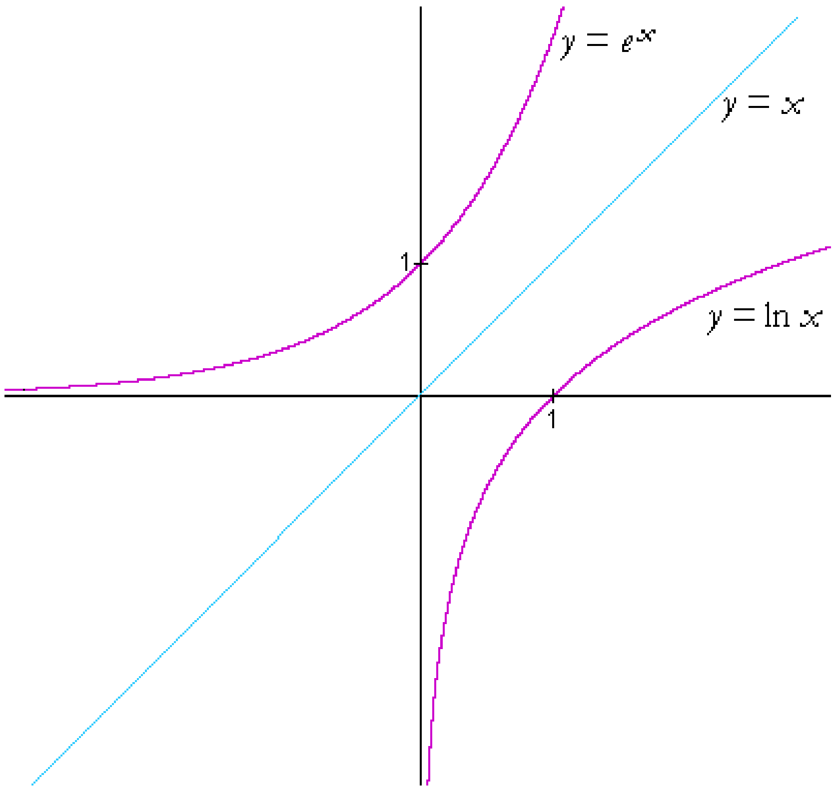


Figura 1.2.: A função inversa $\ln x$ como espelhamento e^x ao longo da diagonal $y = x$.

Exemplo. Olhemos uns exemplos de funções invertíveis. Observamos em particular que a invertibilidade depende do domínio: Quanto menor o domínio, tanto mais provável que a função seja invertível.

- A parábola $y = x^2$ *não* é invertível sobre $\mathbb{R}$, mas só sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\mathbb{R}_{\leq 0}$ (pela radiciação quadrática).
- A função $y = 2x + 1$ cresce de modo estritamente monótono, logo invertível.
- O seno (que mede o comprimento do cateto oposto no círculo unitário) cresce de modo estritamente monótono no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$; logo tem um inverso, o *arco-seno.*

Resumimos:

(i) Toda função estritamente monótona (crescente ou decrescente) é invertível.

(ii) Na inversão o domínio e imagem trocam os papéis.

(iii) Obtemos o gráfico da função inversa pelo espelhamento do gráfico da função na diagonal $y = x$.

1.4. O limite de sequências

O paradoxo de Arquimedes e da tartaruga. Desenhemos a seguinte corrida entre Arquimedes e uma tartaruga:

- Arquimedes corre com uma velocidade momentânea de 1m/s, a tartaruga com 1dm/s, um décimo da de Arquimedes, mas tenha 1m de vantagem.
- Após 1s, Arquimedes percorreu 1m, e a tartaruga 1,1m, uma vantagem de 1dm.
- Após 1,1s, Arquimedes percorreu 1,1m, e a tartaruga 1,11m, uma vantagem de 1cm.
- Após 1,11s, Arquimedes percorreu 1,11m, e a tartaruga 1,111m, uma vantagem de 1mm.

Arquimedes nunca alcançará a tartaruga? A solução é que sim, após 1,11111... segundos, o que não é infinito ∞, isto é, nunca, mas um número real, o *limite* da sequência $1 + 1/10 + 1/100 + \ldots = 10/9$, o ponto em que Arquimedes é à altura da tartaruga (= a interseção da reta de Arquimedes com a da tartaruga).

Juros Compostos pagos em intervalos mais e mais finos. Ponhamos o nosso dinheiro em uma conta de poupança de um banco generoso, 100 reais por 100 dias com uma taxa de juros de 100%. Logo, teremos após 100 dias 200 reais na conta.

Agora proponhamos ao banco, no lugar de 100% uma única vez, pague 10% dez vezes, isto é após cada décimo dia um décimo dos juros. Logo, teremos

- após 10 dias $110 = 100 \cdot (1{,}1)$ reais na conta,
- após 20 dias $110 \cdot (1{,}10) = 121 = 100 \cdot (1{,}1)^2$ reais na conta, ... e
- finalmente, após 100 dias $100 \cdot (1{,}1)^{10} = 100 \cdot 2{,}5937424601 \approx 259$ no lugar de 200 reais na conta!

Tornamo-nos arbitrariamente ricos, ao diminuirmos os intervalos de pagamento mais e mais? Não! Se o banco pagasse, por exemplo, os juros (compostos) em 1.000.000 de intervalos, isto é, quase cada segundo, teríamos

$$100 \cdot (1{,}0000001^{1.000.000}) \approx 100 \cdot 2{,}71828 = 271{,}828$$

reais na conta. Isto é, observamos que a sequência $(1 + 1/n)^n$ converge ao *número de Euler* $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$!

Vemos outro exemplo:

Questão. *Sejam os juros de uma conta de poupança* 200 *por centos por ano. Há* 16 *reais na conta da poupança.*

(i) *Quantos reais há na conta após um ano?*

(ii) *Quantos reais há na conta após um ano se a metade dos juros é paga após cada semestre?*

(iii) *Quantos reais há na conta após um ano se um quarto dos juros é pago após cada trimestre?*

(iv) *Seja* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *um número natural, e seja a* n*-ésima parte dos juros paga* n *vezes durante o ano após intervalos de tempo com a mesma duração. Seja* $Q(n)$ *a quantia na conta após um ano. A qual quantia converge* $Q(n)$ *quando* n *cresce ao infinito?*

Demonstração:

(i) Após um ano há

$$16 + (200/100)16 = 16 + 32 = 48$$

reais na conta

(ii) Após o primeiro semestre há

$$16 + (100/100)16 = 32,$$

e após o segundo semestre há

$$32 + (100/100)32 = 64,$$

reais na conta.

(iii) Após o primeiro trimestre há

$$16 + (50/100)16 = 24,$$

após o segundo trimestre há

$$24 + (50/100)24 = 36,$$

após o terceiro trimestre há

$$36 + (50/100)36 = 54,$$

e após o quarto trimestre há

$$54 + (50/100)54 = 81,$$

reais na conta.

(iv) Em geral, a quantia $Q(n)$ para n intervalos da mesma duração é

$$Q(n) = Q \cdot \left(1 + \frac{P}{n}\right)^n$$

onde

- denote Q a quantia inicial,
- denote P a percentagem.

Aqui $Q = 16$ e $P = 200/100 = 2$. Logo

$$Q(n) = 16 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

Pela definição da função exponencial,

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^2 \approx 7{,}39 \quad \text{para } n \to \infty.$$

Logo,

$$Q(n) \to 16 \cdot e^2 \approx 16 \cdot 7{,}39 \approx 118{,}2.$$

■

Limite como ponto de acumulação. Um *limite* (ou *ponto de acumulação*) a de uma sequência a_1, a_2, ... (pontos ordenados na reta) é um ponto na reta tal que todos os pontos da sequência se acumulem em torno de a. Isto é, quanto mais avançamos na sequência, tanto menor o número de pontos fora de um pequeno intervalo em volta de x. Mais exatamente, em cada intervalo $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ arbitrariamente pequena em torno de a estão todos os pontos da sequência, exceto um número finito; vê Figura 1.3 para o exemplo $a_n = 1/n$ na vizinhança de $a = 0$.

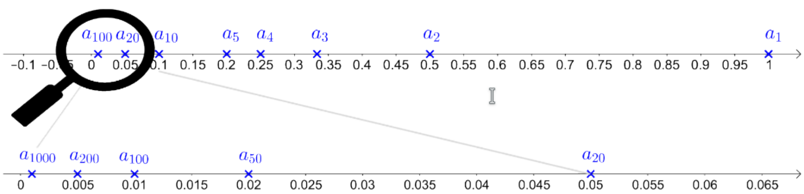


Figura 1.3.: O limite como ponto de acumulação na reta

Definição 1.2. Uma sequência (de números reais) $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ converge a um *limite* a, se para qualquer distância (que pode ser arbitrariamente pequena) $\varepsilon > 0$ vale $|a - a_n| < \varepsilon$ a partir de um índice n_0 (isto é, para todos os $n \geq n_0$). Escrevemos $(a_n) \to a$ ou $\lim a_n = a$.

Figura 1.4 ilustra Definição 1.2 pela interpretação da sequência como pontos no plano, onde abcissa n indica o índice e a ordenada a_n o valor de cada membro.

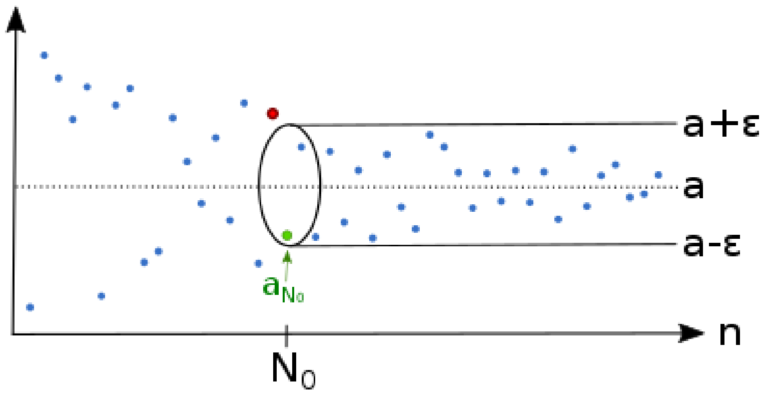


Figura 1.4.: O tubo de raio ϵ em que os pontos da sequência se acumulam

Para ganhar um intuito, marca os pontos das primeiras entradas de umas sequências convergentes na reta, por exemplo, as entradas para $n = 1, 2, 5, 10, 1000, \ldots$ das sequências discutidas acima:

- A sequência $1 + 1/10 + 1/10^2 + \cdots \to 10/9$.
- A sequência $(1 + 1/n)^n \to e$.

Experimenta também com o visualizador de pontos de acumulação em http://demonstrations.wolfram.com/AccumulationPoint/.

Podemos igualmente pensar de uma sequência $(a_n : n \in \mathbb{N})$ como função $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde $a(n) = a_n$. Neste caso, o gráfico de uma sequência $a_n \to a$ ficará em uma vizinhança tubular mais e mais fina em volta da reta $y = a$; vê Figura 1.5

1.5. A exponencial e o logaritmo

Acabamos de convencer-nos de que $(1 + 1/n)^n \to \mathrm{e}$, correspondente a taxas de juros de 100%. Mas, a sequência $(1 + x/n)^n$ também converge a um limite para outras taxas de juros x, mesmo negativas; por exemplo, para $x = 0{,}05$, uma taxa de 5%. Dado x, denotamos este limite com e^x.

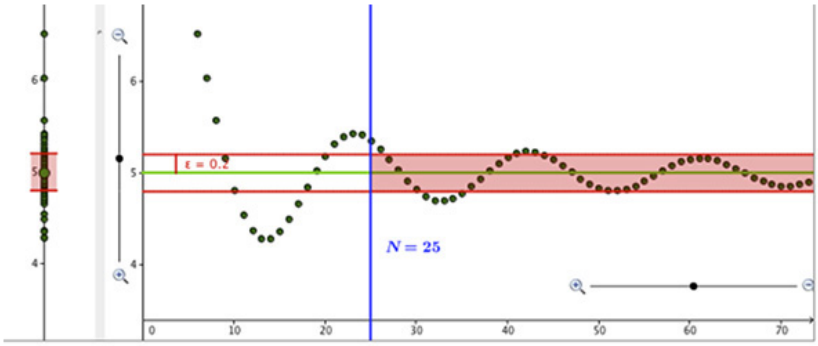


Figura 1.5.: A sequência como função $n \mapsto a_n$ e o seu limite a como reta $y = a$

Definição 1.3. Seja e o número de Euler. A função

$$f(x) = \lim(1 + x/n)^n$$

é a *exponencial* (na base e) e denotado por $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Nota 1.4.

- Vale $\mathrm{e}^0 = 1$ e $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- A exponencial e se comporta como os expoentes racionais $x^2, \sqrt{x}, \ldots$, isto é,
  (i) $\mathrm{e}^{x'+x''} = \mathrm{e}^{x'}\mathrm{e}^{x''}$;
  (ii) $(\mathrm{e}^x)^r = \mathrm{e}^{xr}$, e
  (iii) a exponencial e^x cresce de modo estritamente monótono sobre $\mathbb{R}$ inteiro (vê o seu gráfico).

  Logo, valem para a exponencial as mesmas leis como no cálculo de potências. Cautela: Aqui a variável é o *expoente* e não a base, como em $x \mapsto x^2$.

Acabamos de observar que a exponencial cresce de modo estritamente monótono, logo tem um inverso.

Definição 1.5. O inverso da exponencial e^x é o *logaritmo natural* denotado por $\ln(x)$.

Nota 1.6.

Como a imagem de e^x é $\mathbb{R}_{>0}$, vale $\mathrm{D}\ln = \mathbb{R}_{>0}$ e $\mathrm{I}\ln = \mathbb{R}$.

Por definição do inverso, $\ln e^x = x$ e $e^{\ln x} = x$. Em particular, $\ln 1 = 0$ e $\ln e = 1$.

O Logaritmo tem as seguintes propriedades, correspondentes às da exponencial:

(i) $\ln(x'x'') = \ln x' + \ln x''$,

(ii) $\ln x^r = r \ln x$, e

(iii) a função ln cresce de modo estritamente monótono sobre $\mathbb{R}_{>0}$ (vê o seu gráfico).

Demonstração: Como ln é o inverso de exp, todo argumento y é da forma $y = e^x$. Obtemos

$$\ln y'y'' = \ln(e^{x'}e^{x''}) = \ln(e^{x'+x''}) = x' + x'' = \ln(e^{x'}) + \ln(e^{x'}) = \ln y' + \ln y''.$$

A segunda propriedade, que $\ln x^r = r \ln x$ é discutida nos exercícios. ■

Até agora soubemos só como definir expoentes racionais de e,por exemplo, $e^{5/2} = \sqrt{e^5}$. Pela exponencial e podemos agora definir também expoentes irracionais, isto é, expoentes reais arbitrários: Para qualquer base b em $\mathbb{R}_{>0}$,

$$e^{\ln(b)\cdot x} = (e^{\ln b})^x = b^x,$$

com a sua função inversa

$$\log_b x = \ln x / \ln b,$$

o *logaritmo na base b*.

Exemplo 1.7.

- Decaimento radioativo: Uma substância radioativa decai, de modo natural, exponencialmente $n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$, onde
  - n_0 = número de núcleos atómicos iniciais,
  - $n(t)$= número de núcleos atómicos ao tempo t, e
  - λ = constante de decaimento ([P, Página 270] que depende da substância, por exemplo, 14 por minuto para Carbono-14.

- Descarga de um condensador com capacidade C via um resistor com resistência R. A tensão do condensador U diminui exponencialmente com o tempo percorrido t, isto é, $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/RC}$, onde
  - U_0 = tensão inicial, e
  - RC = produto da capacidade e da resistência.
- O êmbolo (ou pistão) de um amortecedor percorre na introdução um caminho y conforme a lei $y(t) = y_0(1 - e^{-kt})$ onde $y_0 > 0$ e $k > 0$ são constantes.
- Para mais exemplos, vide [P, Página 270 ff].

Exercício

(i) Faze uma tabela de valores e desenha os gráficos de umas funções polinomiais como $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ e $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

(ii) Dados os valores aproximativos $\ln 2 = 0{,}69$ e $\ln 3 = 1{,}10$. Calcula $\ln 4, \ln 6, \ln 27, \ln 324, \ln 108$ usando somente as quatro operações fundamentais da aritmética.

(iii) Desenha em um diagrama comum os gráficos das funções

$$f(x) = \ln x, \quad f(x) = \ln |x|, \quad f(x) = \ln x + 1, \text{ e } \quad f(x) = \ln(x+1).$$

(iv) Determina todas as soluções da equação $\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} = 3$.

(v) Demonstra as regras $\ln x \ln y = \ln(x + y)$ e $\ln(rx) = (\ln x)^r$ usando as regras correspondentes da exponencial, isto é, $\mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}$ e $(\mathrm{e}^x)^r = \mathrm{e}^{xr}$.

(vi) Dá exemplos de sequências que

(a) crescem monotonamente e têm o limite $a = 7$,

(b) decrescem monotonamente e têm o limite $a = 3$,

(c) oscilam e convergem ao limite $a = -6$, e cujas entradas nunca são < -12 e nunca maior > -3. Aqui uma sequência (a_n) *oscila* ao seu limite a, se $a_n > a$ implica $a_{n+1} < a$.

Marca as suas entradas para $n = 1, 2, 5, 10, 1000, \ldots$ na reta.

(vii) Determina o limite das sequências:

$$\frac{2n^3 - 5n^2 + 8}{7n^3 + 2}, \quad \left(1 - \frac{2}{n-3}\right)^{n+7}, \text{ e } \quad \frac{3n+4}{2n+1}.$$

Determina para a terceira sequência $a_n = \frac{3n+4}{2n+1}$ para $\varepsilon > 0$ um limite inferior $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|a - a_n| \leq \varepsilon$.

Dica, em particular, para a segunda sequência: Com limites podemos calcular como com números, isto é, a formação de um limite comuta com + e ·. Usa aqui que

$$a_n b_n \to ab, \quad \text{para } a_n \to a, b_n \to b.$$

Soluções

(iv) $e^x + 2e^{-x} = 3 \iff t^2 + 2 = 3t \quad \text{com } t = e^x \ldots.$

(vii) (a) 2/7

(b) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{2}{n-3})^{n+7} = \lim_{m\to\infty}(1 - 2/m)^{m+10} = e \cdot 1$

(c) $g = 3/2$ e $\left|\frac{3n+4}{2n+1} - 3/2\right| = \left|\frac{5/2}{2n+1}\right| < \varepsilon \iff 2n + 1 > \frac{5}{2\varepsilon}.$

2. Limites de funções e continuidade

2.1. Limites no infinito

Como se comporta uma função para argumentos crescentes? Seja, por exemplo, $f(x) = 1/x$. Se $(x_n) = (10, 100, 1000, \ldots) \to \infty$, então

$$f(x_n) = 1/10, 1/100, 1/1000, \ldots) \to 0.$$

Em símbolos, $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ ou $f(x) \to g$ para $x \to \infty$. Porém, se

$$(x_n) = (1/10, 1/100, 1/1000, \ldots) \to \infty,$$

então

$$f(x_n) = 10, 100, 1000, \ldots) \to \infty.$$

Que x aparece no denominador é, porém, não suficiente para $f(x_n) \to \infty$. Se olhamos, por exemplo, o gráfico de $f(x) = \sin x/x$ em Figura 2.1, vemos que $f(x_n) \to 1$ quando $x_n \to 0$.

Outros comportamentos mostra

- a função $f(x) = \ln x \to -\infty$ onde $f(x_n) \to 0$ para $x_n \to 0$, e
- a função $f(x) = e^{-x}$ onde $f(x_n) \to 0$ para $x_n \to \infty$.

Definição 2.1. A função $f(x)$ *tem para* $x \to \infty$ *o limite* g *em* $\mathbb{R}$ (ou f *converge para* $x \to \infty$ *ao limite* g), se para toda distância $\varepsilon > 0$ existe uma barreira inferior $M > 0$ tal que $|f(x) - g| < \varepsilon$ para todos os $x > M$. O número g é chamado de *assimptota horizontal*.

Analogamente para $x \to -\infty$.

Nota 2.2. Visualmente, isto vale, se para todos os $x \geq M$ os pontos do gráfico estão no tubo de raio ε em volta da reta $y = g$.

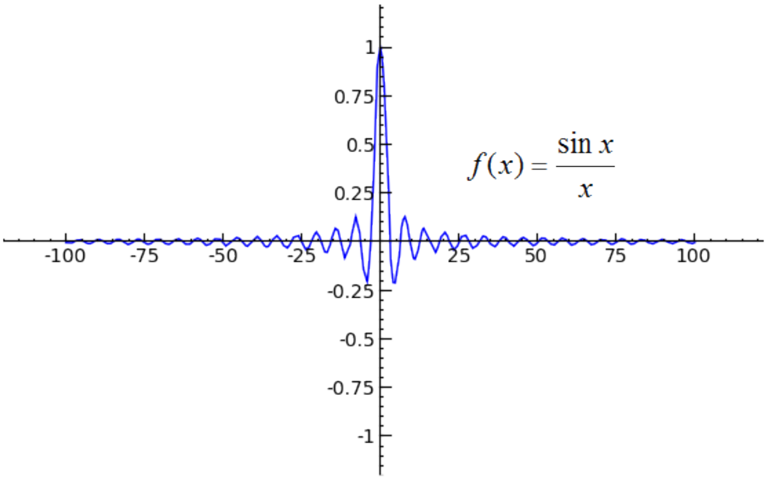


Figura 2.1.: O gráfico de $f(x) \sin x/x$

Exemplo 2.3.

(i) Seja $f(x) = \frac{2x-1}{3x+6}$. Se $x \to \infty$, então $f(x) \to 2/3$, pois

$$|f(x) - 2/3| = \left|\frac{2x-1}{3x+6} - \frac{2}{3}\right| = \frac{-5}{3x+6} < \varepsilon \iff \frac{5}{3\varepsilon} < |x+2|.$$

Vide Figura 2.2 ou [FF, Página 110] para o seu gráfico em torno de $x_0 = 2/3$.

(ii) Seja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Então $f(x) \to 0$ para $x \to \infty$, porque $|\sin| \leq 1$ como indica Figura 2.1. (Vide também o gráfico em [FF, Página 111]).

(iii) Pêndulo balístico de massa m e autofrequência $\omega_0 = 2\pi f$ e força exterior periódica $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0 \sin(\omega t)$: Primeiro tempo de ataque, em seguida pulsatância ω (isto é, frequência angular, a frequência de rotações multiplicada por 2π). Amplitude da oscilação

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(\omega) = \frac{\mathrm{F}_0}{m|w^2 - w_0^2|}$$

(Gráfico [P, Página 184].) Se $\omega \to \omega_0$, então $\mathrm{A}(\omega) \to \infty$, catástrofe de ressonância! Se $\omega \to \infty$, então $\mathrm{A}(\omega) \to 0$, o pêndulo não consegue mais acompanhar as variações frequentes, então estagnação!

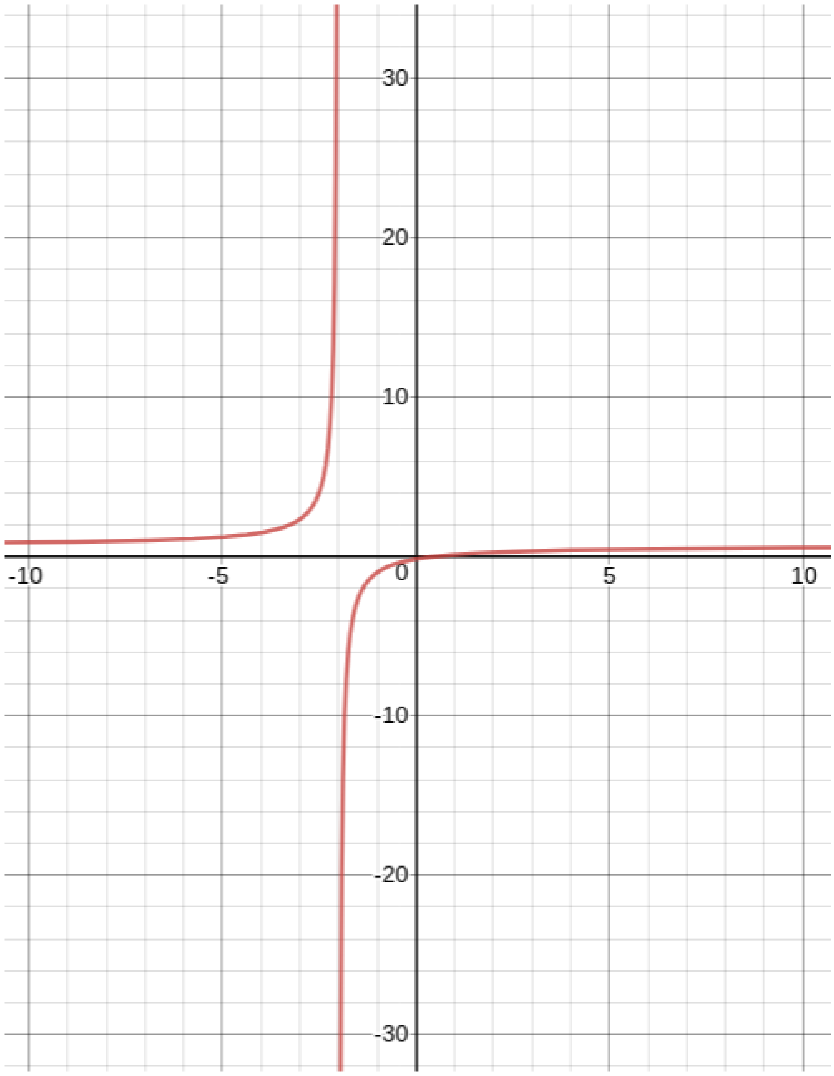


Figura 2.2.: O gráfico de $f(x) = \frac{2x-1}{3x+6}$ em torno de $x_0 = 2/3$

Possivelmente f para $x \to \infty$ cresce sem limite; neste caso falamos de um *limite impróprio*.

Definição 2.4. A função f tem para $x \to \infty$ o *limite impróprio* ∞, se para toda barreira inferior $K > 0$ existe uma barreira $M > 0$, tal que $f(x) > K$ para todos os $x > M$. Escrevemos $f(x) \to \infty$ para $x \to \infty$.

Analogamente para $x \to \pm\infty$ e $f(x) \to \pm\infty$.

Exemplo 2.5.

(i) Olha $f(x) = \mathrm{e}^x$. Pela definição de e e pela desigualdade de Bernoulli, isto é, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, obtemos $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, logo $f(x) \longrightarrow \infty$ para $x \longrightarrow \infty$.

(ii) Para $f(x) = x^2 + x$ vale $f(x) \to \infty$ para $x \to \infty$.

(iii) Tem-se $f(x) \longrightarrow \infty$ para $x \longrightarrow \infty$, se $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. (Divide por x^2.)

(iv) Para as funções racionais $f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_0 x^m + \cdots + b_0}$ vale

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & m < n \\ a_m/b_n, & m = n \\ \infty, & m > n, a_m/b_n > 0 \\ -\infty, & m > n, a_m/b_n < 0. \end{cases}$$

2.2. Limite num ponto

Exemplo 2.6. Olha $f(x) = \sin(1/x)x$ em $x_0 = 0$.

Definição 2.7. Escrevemos $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ para um limite g, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|x - x_0| < \delta$, onde $x \neq x_0$, implique $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Proposição 2.8. *A função f tem em x_0 o limite g se, e tão-somente se, para toda sequência (a_n) com $\lim a_n = x_0$ vale:*

$$\lim f(a_n) = g.$$

Exemplo 2.9. Olha $f(x) = |1/x|$ em $x_0 = 0$.

Definição 2.10. Escrevemos $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, se para todo $K > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x)| > M$. O ponto de abcissa x_0 é chamado de *assimptota vertical.*

2.3. Continuidade de funções

Exemplo 2.11. Olha $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$ e a sequência

$$(x_n) = (1{,}9; 1{,}99; 1{,}999; \ldots) \to 2.$$

Então $(f(x_n)) = (3{,}61; 3{,}9601; 3{,}996001; \ldots) \to 4$. Com efeito, vale $f(x_n) \to 4$ para qualquer escolha de sequência $x_n \to 2$. Escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Dizemos que 4 é o *limite* da função f no ponto de abcissa $x_0 = 2$.

Esta independência do limite equivale à definição seguinte: Geometricamente: $f(x)$ fica perto de $f(x_0)$, se x_0 fica suficientemente perto de x_0. Figura 2.3 ilustra a continuidade expressa pelo critério de ϵ e δ, onde δ mede a proximidade na abcissa e ϵ a na ordenada:

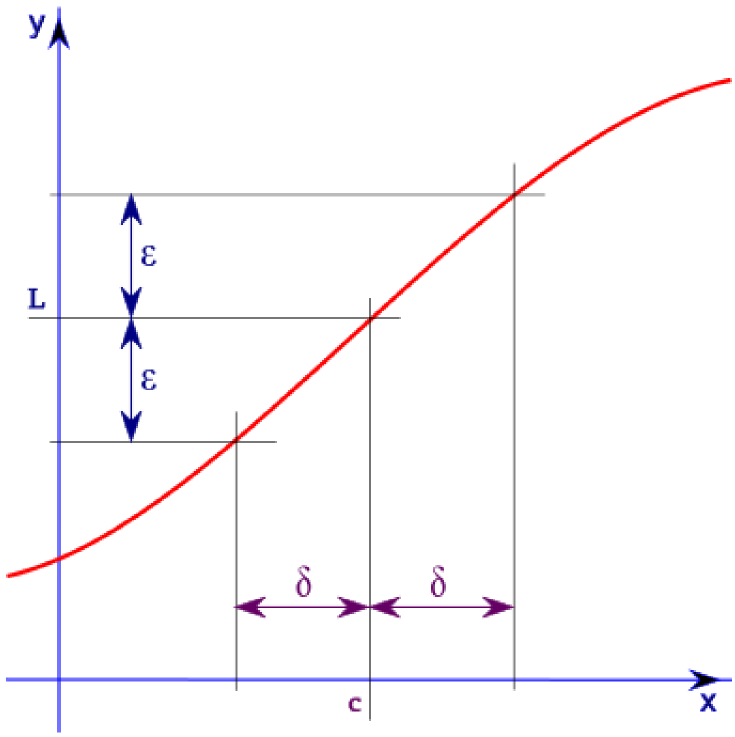


Figura 2.3.: O critério de δ em torno de c e ϵ em torno de $\mathrm{L} = f(x)$

A seguinte definição é Definição 2.7 para $g = f(x_0)$.

Definição 2.12 (Critério de ϵ e δ). A função $f(x)$ é *contínua* no ponto de abcissa x_0, se para toda distância $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequena) existe

$\delta > 0$, tal que $|x - x_0| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ (onde o domínio de f contenha um intervalo em torno de x_0).

A função é *contínua*, se é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 2.13.

(i) Seja $f(x) = 2x + 1$. Afirmação: f é contínua no ponto de abcissa $x_0 = 1$ (para todos os x).

(ii) A que distância de $x_0 = 1$ precisa x ficar para que $f(x) = 2x^2$ fique no intervalo $g \pm \varepsilon = 2 \pm 10^{-38}$ para $g = f(x_0) = 2$? Resposta: $\delta = 0{,}510^{-38}$.

(iii) Todas as funções que olharemos são contínuas, por exemplo, a exponencial, o logaritmo, o seno, cosseno, a raiz, polinômios ...

2.4. Descontinuidades

Se f em x_0 não é contínua, então tem as seguintes possibilidades:

(i) f não é definida em x_0, e
- ou, o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ não existe, e
  - ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (*ponto de infinitude* ou *polo*),
  - ou $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tem limites diferentes da esquerda e da direita (*saltos*),
- ou, o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (*descontinuidade removível*).

(ii) f é definida, e
- ou, o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ não existe,
- ou, o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, mas $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$!

Olhamos uns exemplos correspondentes aos casos acima:

Exemplo 2.14.

(i) *Descontinuidade removível*: A função $f(x) = \frac{3x^2-6x}{x-2}$ é no ponto de abcissa $x_0 = 2$ indefinida, mas, porque $\frac{3x^2-6x}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{x-2}$, tem ali o limite $g = 6$. Logo podemos estender f a uma função g cujo domínio é $\mathbb{R}$ todo, é a reta $x + 3$.

Concluímos que a descontinuidade x_0 pode ser removida, se

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe se estendemos a função neste ponto pelo valor dado por este limite. Porém: Não é sempre possível, por exemplo, para $f(x) = 1/x$ em 0. Neste caso temos um *polo*.

(ii) *Ponto de infinitude, ou polo*: A função $f(x) = \frac{1}{x-3}^2$ não é definida em $x_0 = 3$. Tem-se $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$. Como $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe, não é removível.

Porém: Existem também pontos de descontinuidade em que nem o limite impróprio existe, por exemplo: A função $f(x) = \sin(1/x)$ estendida por $f(0) = 0$: Tem-se $f(1/((2n + 1/2)\pi) = -1$ e $f(1/((2n + 3/2)\pi) = 1$ ([FF, Página 123]).

(iii) *Salto*: A função dada pelo sinal

$$x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$; tem um limite da esquerda e da direita, mas são diferentes! Um exemplo é a função de saltos da cibernética, — em particular, o impulos de dente de serra ([P, Página 189]). Estas funções são exemplos de funções *contínuas em pedaços.*

2.5. Propriedades de funções contínuas

Proposição 2.15. *Se f,g são contínuas no ponto de abcissa x_0, então também $f + g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(x_0) \neq 0$), e vale*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = f(x_0)/g(x_0).$$

Nota 2.16. Para mais regras de cálculo, vide [P, Tabelle 4.2.3].

Proposição 2.17. *Se f é contínua no ponto de abcissa x_0 e g no ponto $f(x_0)$, então também a composição h de f e g, $h(x) = g(f(x))$, é contínua no ponto de abcissa x_0 e vale*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(f(x_0)).$$

Proposição 2.18. *Se $f\colon [a,b] \to \mathrm{I}$ é contínua e invertível, então também a função inversa $f^{-1}\colon \mathrm{I} \to [a,b]$ é contínua.*

Concluímos que a continuidade de f,g significa que podemos trocar a ordem entre a avaliação pela função e a determinação do limite. Por isto podemos facilmente calcular limites que aparentam ser dificilmente calculáveis, por exemplo, $\sqrt{\sin x}$ para $x \to \pi/2$ e $e^{\sqrt{x}}$ para $x \to 1 \ldots$

Os seguintes teoremas não têm tanto valor pelas suas aplicações, mas têm um papel fundamental na criação do cálculo diferencial e integral, o cerne deste curso:

Proposição 2.19. *Seja f contínua no ponto de abcissa x_0 e $f(x_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ em torno de x_0 em que todos os valores têm o sinal de $f(x_0)$ (ou +, ou −). (Bild!)*

Demonstração: Usa a definição da continuidade por ε e δ. ■

Definição 2.20. A função f tem em $x_0 \in [a,b]$ um *Máximo (ou Mínimo) absoluto*, se para todos os $x \neq x_0$ vale que $f(x) < f(x_0)$ (ou $f(x) > f(x_0)$).

Exemplo 2.21.

(i) A função $f(x) = x^2$ em $x_0 = 0$.

(ii) A função $\sqrt{1 - x^2}$ definida sobre $[-1,1]$ em $x_0 = 0$.

Proposição 2.22. *Se f é contínua $[a,b]$, então f assume neste intervalo o seu máximo (e mínimo) absoluto (em particular, é limitada).*

Nota 2.23.

É importante que o intervalo seja fechado, isto é, contenha os pontos da borda! Caso contrário, temos como contra-exemplo $1/x$ sobre $]0,1]$. (Imagem).

Os valores extremos podem ser assumidos na borda ou no interior de $[a,b]$.

No próximo capítulo, buscaremos valores extremos pelos pontos em que o *diferencial* da função é zero. Já destacamos que os valores extremos na borda, geralmente, não são detetados por este método! Vale ao contrário: Seja f sobre $[a, b]$ contínua. Se é estritamente monótona, então os valores extremos são assumidos na borda do intervalo $[a, b]$ (Imagem).

Proposição 2.24 (Teorema do Valor intermediário). *Se f é contínua sobre $[a, b]$, então todo valor entre $f(a)$ e $f(b)$ é assumido por f neste intervalo; isto é, para todo valor y_0 com $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, existe pelo menos um x_0 em $[a, b]$ tal que $y_0 = f(x_0)$. (Imagem!)*

Exercício

(i) Adivinha $\lim_{x\to\infty} f(x)$ para as funções abaixo e demonstra via a nossa Definição 2.1 que o limite adivinhado é o limite verdadeiro:

(a) $\frac{4x^2+1}{2x^2}$

(b) $\frac{4x^2+\sin(x^2)}{2x^2}$

(c) $\frac{\cos x}{x}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(ii) Mostra via Definição 2.1 que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0.$$

Usa a este fim que $\sqrt{x+1} < \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(iii) Demonstra a proposição seguinte: Sejam dadas duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e g, então $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$.

(iv) Demonstra via Definição 2.4, que

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{4} = +\infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} 5\cos x - x^2 = -\infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4+2}{x^2+1} = -\infty$

(d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5} = \infty$.

(v) Demonstra via Definição 2.7 que

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{5x-2}{4} = 2$

(b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{2x} = -1/2$

(vi) Pelo qual valor precisamos de estender as funções seguintes no ponto indefinido $x_0 = 0$ para remover a descontinuidade?

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(b) $f(x) = x\sin(1/x)$

(c) $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$

(vii) Em quais argumentos x têm as seguintes funções descontinuidades, e de que tipo são estas (removível, salto finito ou infinito)?

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

(d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

Soluções

(i) (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$
(b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$
(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(vi) (a) $f(0) = 2$
(b) $f(0) = 0$
(c) $f(0) = \binom{n}{1} = n$

(vii) (a) Um polo em $x = 2, -2$
(b) Uma descontinuidade removível em $x = 2$ pelo valor $f(2) = 1$
(d) Um polo em $x = 2$
(e) Um polo em $x = 0$

3. Derivadas

Frequentemente, queremos otimizar, encontrar o ponto em que uma função é máxima (benefício) ou mínima (custo). Pela curva, estes pontos parecem evidentes, porem, precisa de localizá-los com exatidão. Observa-se que nestes *extremos*, um mínimo ou máximo, a reta tangente, a reta que toca a curva, é horizontal, isto é, tem inclinação 0. A graça do cálculo diferencial é de providenciar um quadro conveniente para formalizar esta horizontalidade da reta tangente pela sua derivada.

Queremos medir a inclinação, ou declive ou *coeficiente angular*, m

(i) de uma curva em um trecho, e

(ii) de uma curva em um ponto.

Observamos que

(i) para uma curva, a sua inclinação m no *trecho* entre os pontos de abcissa x_0 e $x_0 + \Delta x$, isto é, a inclinação da reta secante que intersecta o gráfico nos pontos de abcissa x_0 e $x_0 + \Delta x$, é dada pela proporção entre

- a variação na ordenada Δy, o caminho percorrido verticalmente (= altura), e
- a variação na abcissa Δx, o caminho percorrido horizontalmente (= largura);

isto é, pelo quociente
$$m = \Delta y / \Delta x.$$

(ii) para uma curva, a sua inclinação m em um *ponto de abcissa x*, isto é, a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto com abcissa x_0, é aproximada pelas inclinações $\Delta y / \Delta x$ em trechos menores e menores; isto é, pelo limite m das proporções entre a variação na ordenada e a na abcissa,
$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x.$$

Se y é a distância percorrida no momento x, então

- a inclinação no trecho entre $x + \Delta x$ e x significa a velocidade *média*, e
- a inclinação no ponto x significa a velocidade *momentânea*.

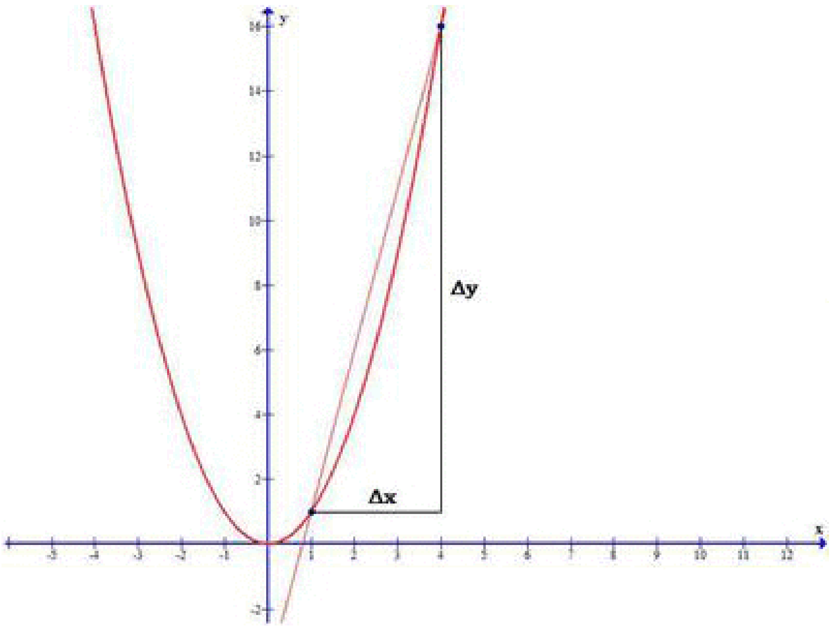


Figura 3.1.: A inclinação de uma curva num trecho com comprimento Δx.

Em vez de Δx, a notação h é comum também. Isto é, entre os pontos de abcissa x_0 e $x_0 + h$, obtemos a inclinação

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ao diminuir a distância h entre os pontos, a reta secante gira em torno do ponto $P = (x_0, f(x_0))$, e obtemos no limite a inclinação da reta tangente

$$m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

como em Figura 3.3.

Observamos

- que $m = 0$ se, e tão-somente se, tem um extremo,

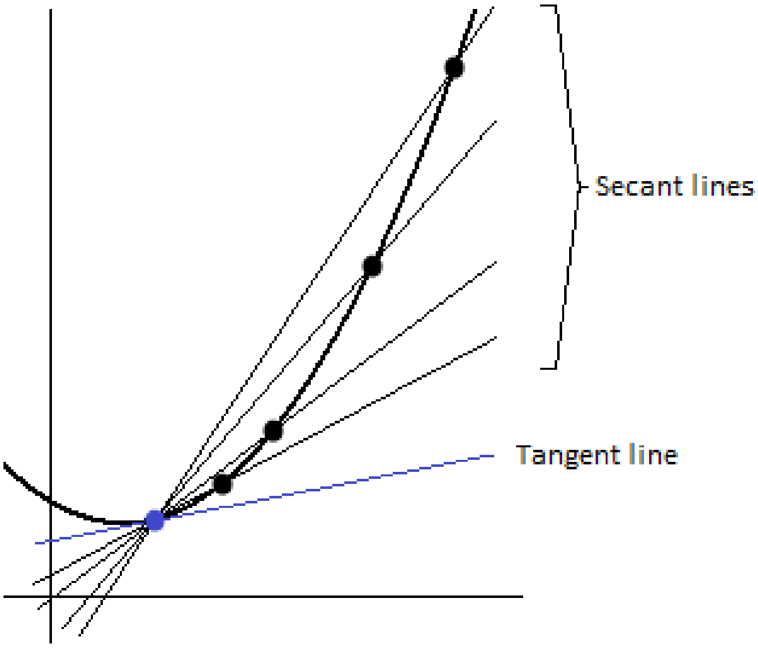


Figura 3.2.: Reta secante no ponto de abcissa x_0

- que $m > 0$ se, e tão-somente se, inclinação é positiva, e
- que $m < 0$ se, e tão-somente se, inclinação é negativa.

Vide esta https://www.desmos.com/calculator/8ubngtz3ei para a convergência da reta secante à reta tangente.

Exemplo 3.1.

- Por exemplo, para $f(x) = x^2$, obtemos $m = 2x_0$.
- Às vezes não existe, por exemplo, para $f(x) = |f(x)|$ em $x_0 = 0$.
- Computemos m para $x = 1/3x^2$ em x_0.

Definição 3.2. Seja f definida em um intervalo aberto $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ em torno de x_0. A função f é *diferençável* em x_0, se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

existe. Este limite é a *derivada* de f no ponto de abcissa x_0 e denotado por $f'(x_0)$.

A função é *diferençável*, se é diferençável em todo ponto.

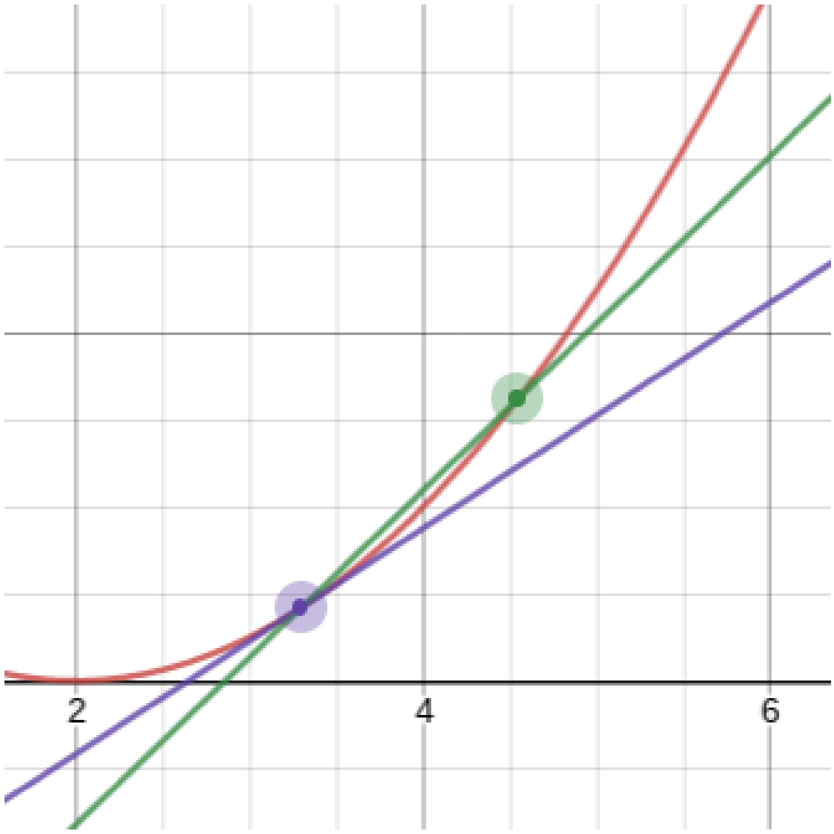


Figura 3.3.: A reta secante (= a reta verde) como aproximação da reta tangente (= a reta violeta)

Nota 3.3.

(i) Definição pormenorizada do limite do quociente de diferenças.

(ii) Também se denote por

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right)_{x=x_0} = \mathrm{D}\, f(x_0).$$

(iii) Se a função é diferençável em x_0, então é contínua em x_0.

Exemplo 3.4.

(i) A derivada de $f(x) = x^3$ no ponto de abcissa x_0 é $6x_0^2$.

(ii) A derivada de $f(x) = \frac{a}{x-b}$ em $x_0 \neq b$ é $a/(x_0 - b)^2$.

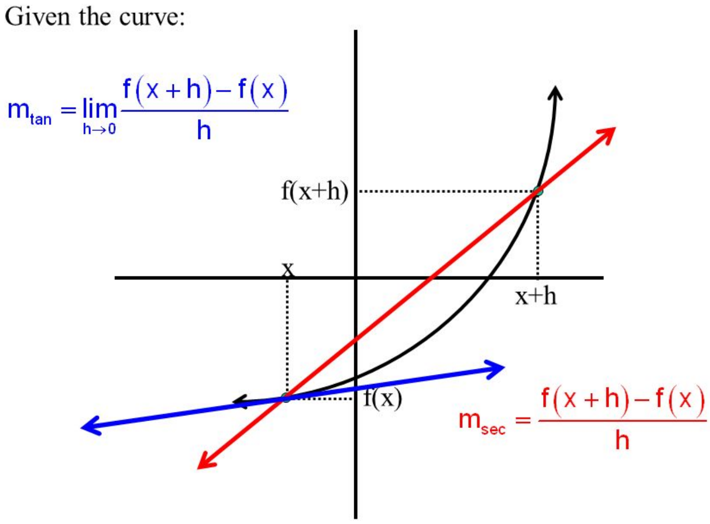


Figura 3.4.: Reta tangente no ponto de abcissa x_0

Definição 3.5. Seja $f :]a,b[\to \mathrm{I}$ diferençável. Então a função f' definida sobre $]a,b[$ é a *(primeira) derivada* de f.

Figura 3.6 mostra como a derivada (= a curva traçada) indica a inclinação da reta tangente (= reta traçada) a função em cada ponto.

Vide este https://www.desmos.com/calculator/lopuzwozvm para comparar o gráfico da função com o da sua derivada.

Nota 3.6.

(i) A função f' associa a x o valor $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

(ii) Se $y = f(x)$, então escrevemos $y' = f'(x)$.

Exemplo 3.7.

(i) Seja $f(x) = ax^n$. Para ver $f'(x_0) = anx_0^{n-1}$, usa o artifício

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}),$$

ou melhor: Escreve diretamente por uma fórmula binomial.

(ii) Por exemplo, $a = 8$ e $n = 7$.

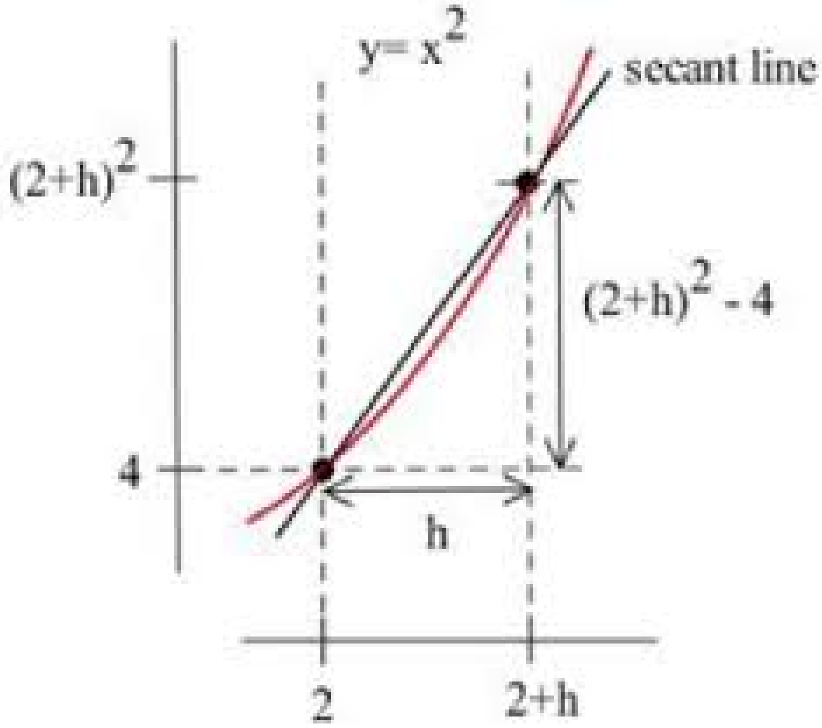


Figura 3.5.: A inclinação de uma reta secante em $x_0 = 2$ e com $\Delta x = h$ para $f(x) = x^2$.

(iii) Olha $f(x) = |x|$. Como $f(x) = x$, se $x < 0$, e $f(x) = -x$, se $x > 0$, então $f(x)$ é em $x_0 \neq 0$ diferençável com $f'(x) = 1$ respetivamente $f'(x) = -1$ pelo exemplo acima para $a = \pm 1$ e $n = 1$. Porém, os limites da esquerda e direita em $x_0 = 0$ são -1 e 1, logo *não é diferençável em* $x_0 = 0$.

Exemplo 3.8.

(i) Como aplicação, seja $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ para $t \geq 0$ o caminho percorrido pela maçã na queda da altura h_0. A derivada $v(t) = h'(t)$ significa a velocidade momentânea, que é proporcional ao tempo t.

(ii) Seja $w(t)$ o trabalho que uma máquina fez até o ponto de tempo t. A *potência* P é definida como o trabalho por unidade de medida de tempo. Se esta unidade convergir a 0, então $\mathrm{P}(t_0) = w'(t_0)$ é a potência no momento t_0.

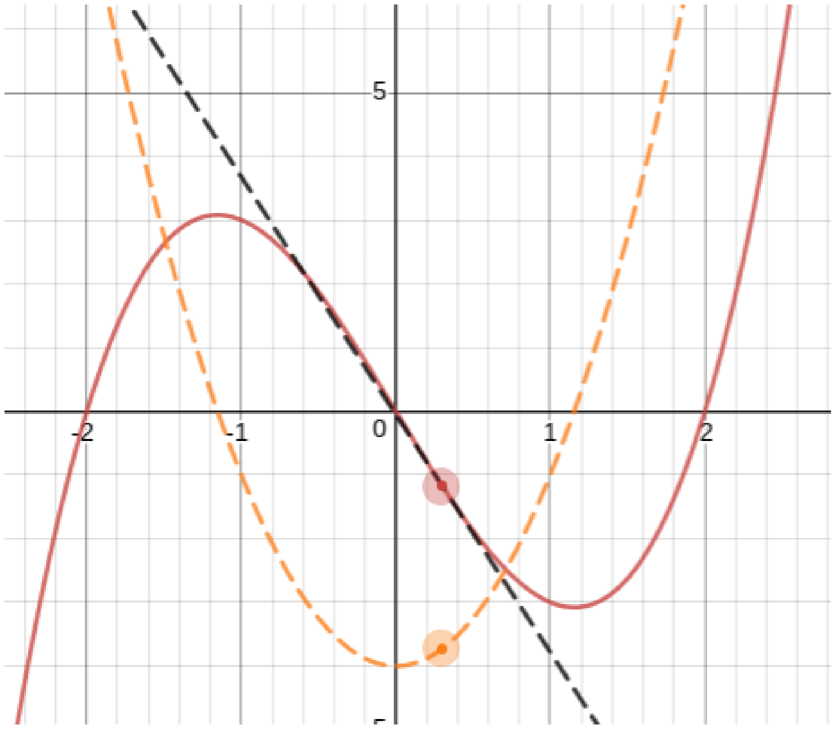


Figura 3.6.: A derivada indica a inclinação da reta tangente em cada ponto.

3.1. Derivadas de funções importantes

Para uma tabela, confere [P, Tabela 1, Seção IV.1.3].

Proposição 3.9.

(i) $f'x = 0$ *para* $f \equiv c$ *a função constante (cuja inclinação é nula).*

(ii) $f'(x) = anx^{n-1}$ *para* $f(x) = ax^n$.

(iii) $f'(x) = f(x)$ *para* $f(x) = e^x$.

Demonstração: Já mostramos (ii) (que implica (i)). Mostremos (iii):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

onde usamos $\frac{e^h - 1}{h} \to 1$ para $h \to 0$. ∎

Nota 3.10.

(i) Observamos que a exponencial é a única função, fora a função $\equiv 0$, cuja derivada iguala ela mesma.

(ii) Regra (ii) vale também para expoentes n em $\mathbb{R}$.

Proposição 3.11.

(i) *$f'(x) = 1/x$ para $f = \ln x$.*

(ii) *$\sin'(x) = \cos x$ e $\cos'(x) = \sin(x)$.*

Demonstração:

(i) Vamos derivar da regra para a derivada da função inversa.

(ii) Tem-se

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Se $y = x_0 + h$ e $x = x_0$, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \cos(x+h/2)\frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x,$$

pois cos é contínua e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

■

3.2. Regras da derivação

Olha [P, Seção V.2] para uma lista completa.

Proposição 3.12.

(i) *Regra do fator: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c \cdot f(x) = c \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ para uma constante c em $\mathbb{R}$.*

(ii) *Regra da soma: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) + g(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$ para funções f e g.*

Demonstração: Usa a definição da derivação. ■

Nota. Com (ii) e a regra $f(x) = ax^n$, podemos determinar todas as derivadas de polinômios (por exemplo, $p'(x)$ para $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$)

Proposição 3.13.

(i) *A regra do produto:* $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *para funções* f *e* g.

(ii) *A regra do quociente:* $[1/g(x)]' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ *e mais geralmente* $[f(x)/g(x)]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Demonstração: (i): Usa o artifício

$$\lim_{h\to 0} \frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}.$$

(ii): Seja x_0 um ponto em que $g(x_0) \neq 0$. Por causa da continuidade de g existe um intervalo em torno de x_0 tal que $g(x) \neq 0$. Para $x+h$ neste intervalo, segue

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

O caso geral segue por (i). ■

Nota. Como $f' = 0$ para $f \equiv c$ e $f' = 1$ para $f(x) = x$, podemos derivar todos os polinômios.

Proposição 3.14 (Regra de Cadeia). *Seja* $f(x)$ *em* x_0 *diferençável,* $g(y)$ *em* $y = f(x_0)$. *Então é* $h := g \circ f$ *no ponto de abcissa* x_0 *diferençável e vale* $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f^{(}x_0)$.

Demonstração: Intuitivamente,

- $f(x)$ comporta-se perto de x_0 como a multiplicação pelo valor $m = f'(x_0)$, e
- $g(x)$ comporta-se perto de $f(x_0)$ como a multiplicação pelo valor $n = g'(f(x_0))$.

Por isso, a composição comporta-se perto de x_0 como a composição das multiplicações

$$x \mapsto mx_0 \mapsto (nm) \cdot x_0,$$

isto é, $nm = g'(f(x_0)) \cdot f^{(}x_0) = (g \circ f)'(x_0)$. ■

Corolário 3.15 (Regra do inverso). *Se f é diferençável e invertível com $f'(x) \neq 0$, então o seu inverso f^{-1} é diferençável, e vale $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Demonstração: Mostramos só que a fórmula vale (mas não que f^{-1} é diferençável). Como $f'(x) = 1$ para $f(x) = x$, vale $(f \circ f^{-1})' = 1$. Pela Regra da Cadeia,

$$1 = (f \circ f^{-1})' = (f' \circ f^{-1}) \cdot (f^{-1})'.$$

Como $f'(x) \neq 0$, vale $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$. ∎

Exemplo 3.16.

(i) Seja $f(x) = e^x$. Observamos que $f'(x) = e^x \neq 0$ para todos os x. Então vale para o inverso $\ln x$ de $f(x) = e^x$, que

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = 1/x.$$

(ii) As potências gerais x^r, isto é, para r em $\mathbb{R}$ (em vez de r em $\mathbb{N}$) são definidas por $x^r := e^{r \ln x}$. Então vale pela regra da cadeia que

$$f'(x) = e^{r \ln x} \cdot r/x = r x^{r-1}.$$

3.3. Teoremas importantes para funções diferençáveis

Observamos por Figura 3.7 que o gráfico de uma função pode ter vários pontos mais altos e baixos, os seus extremos, os *mínimos* e *máximos* locais:

Definição 3.17. A função $f : \mathrm{D} \to \mathrm{I}$ tem no ponto de abcissa x_0 um *máximo respetivamente mínimo local*, se existe um intervalo aberto $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathrm{D}$ em torno de x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$ respetivamente $f(x_0) \leq f(x)$ para todos os x neste intervalo.

Teorema 3.18 (Teorema de Rolle). *Seja $f :]a,b[\to \mathrm{I}$ em $x_0 = c$ diferençável. Se f tem no ponto de abcissa c um mínimo ou máximo local, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Tem-se $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ para $h > 0$ e $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ para $h > 0$. Por causa da diferenciabilidade vale $0 \leq f'(c) \leq 0$. ∎

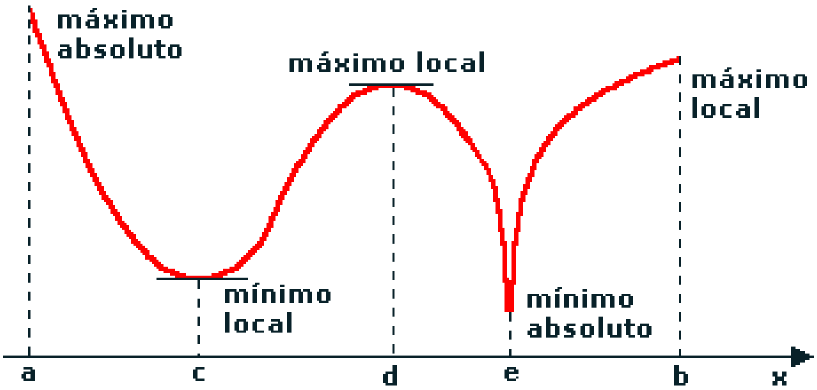


Figura 3.7.: Extremos locais e globais (ou *absolutos*).

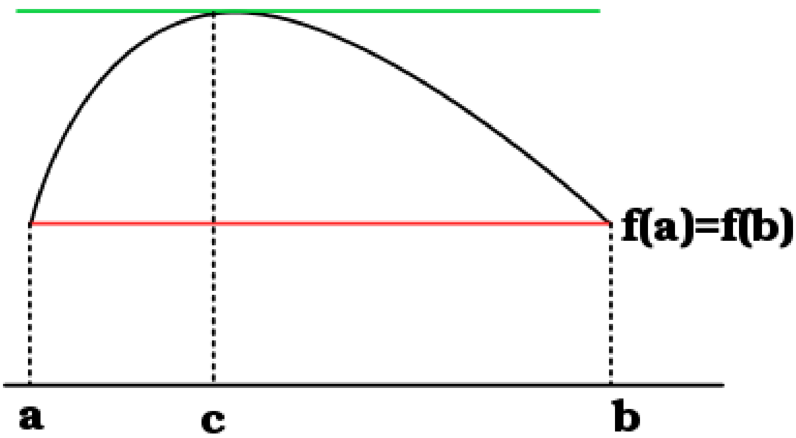


Figura 3.8.: O Teorema de Rolle

Teorema 3.18 é ilustrada em Figura 3.8.

Teorema 3.19 (Teorema do Valor Médio). *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathrm{I}$ *contínua e diferençável em* $]a,b[$. *Então existe* $x_0 = c$ *em* $]a,b[$ *com*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração: Mostramos que se $f(a) = f(b)$, então existe c com $f'(c) = 0$. (Exercício: Mostra o caso geral.)

Se f é constante, então $f' \equiv 0$. Caso contrário, existe x com $f(x) \neq f(a)$. Logo, existe um máximo M e mínimo m de f, e um deles tem de ser diferente de $f(a) = f(b)$. Isto é, existe c com $f(c) = \mathrm{M}$ ou $f(c) = m$. Este c não pode ocorrer na borda, logo é um máximo ou mínimo local. Por Teorema 3.18, $f'(c) = 0$. ■

Teorema 3.19 é ilustrada em Figura 3.9.

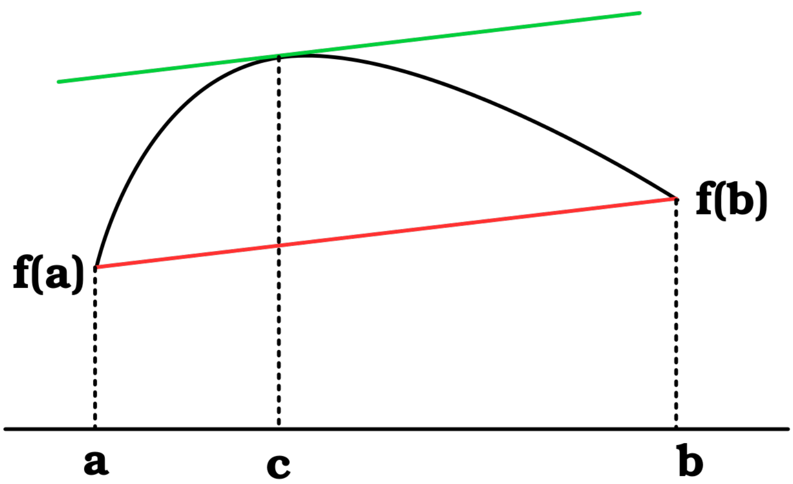


Figura 3.9.: O Teorema do Valor Médio

Proposição 3.20. *Sejam f e g funções que são contínuas em $[a,b]$ e diferençáveis em (a,b). Se $f'(x) = g'(x)$ para todos os $x \in (a,b)$, então existe c em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) - g(x) = c$ para todos os $x \in [a,b]$.*

Demonstração: Pelo Teorema do Valor médio, $f' = 0$ se, e tão-somente se, $f \equiv c$. Aplica esta equivalência a $h := f - g$. ■

3.4. Derivadas iteradas

Exemplo 3.21. A função $f(x) = x^3$ é diferençável; igualmente a sua derivada $f'(x) = 3x^2$. Dizemos que f *é duas vezes diferençável.* A derivada de f' é a *segunda derivada de f* e denotada por f''.

Neste caso $f'' = 6x$. Podemos continuar assim, isto é, iterar a derivação; por exemplo, $f''' \equiv 6$.

Definição 3.22. As derivadas de grau maior de uma função f são recursivamente definidas por $f^{(n)} = f^{(n-1)}$. A função $f^{(n)}$ é a *n-ésima derivada* de f.

Nota 3.23. Outra notação é $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f$. Para $n = 1,2,3$, usa-se também a notação f', f'' e f'''.

Exemplo 3.24.

(i) Se um polinômio $p(x)$ tem um zero duplo em x_0, então $p(x) = (x - x_0)^2 q(x)$ e vale $p'(x_0) = 0$ e $p''(x_0) \neq 0$. Mais geralmente, para um zero k-uplo, vale $f^{(1)}(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

(ii) A função $f(x) = 1/2x|x|$ é diferençável com $f'(x) = |x|$, porque $|x|' = \frac{|x|}{x}$. Porém, a sua segunda derivada $f'' = x/|x|$ não é definida em 0; por isso não é diferençável.

(iii) Uma aplicação: Se $s(t)$ o caminho percorrido por um objeto em função do tempo, então $s'(t_0)$ é a velocidade momentânea e a sua derivada s'' é a mudança momentânea da velocidade, isto é, a aceleração momentânea, cf. [P, Página 362].

Exercício

(i) Determina a derivada das seguintes funções por Definição 3.2:

  (a) $f(x) = ax$.

  (b) $f(x) = ax^3$.

(ii) Mostra que a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x)x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

não é diferençável no ponto de abcissa $x = 0$ (apesar de ser contínua, como acabamos de ver!).

Dica: Mostra que $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ não existe pela construção de duas sequências (a_n) e (b_n) que convergem ambas a 0 e no quociente de diferenças (isto é, no lugar de h) rendem dos limites diferentes. O resultado segue da seguinte proposição:

Proposição 3.25. *A função f tem no ponto de abcissa x_0 o limite g se, e somente se, para toda sequência (a_n) com $\lim a_n = x_0$ vale*

$$\lim f(a_n) = g.$$

(iii) Determina para a função $f(x) = 3x^4$ a equação da reta tangente no ponto de abcissa $x_0 = 4$ e num ponto arbitrário x_0.

(iv) As seguintes funções são em quais pontos contínuas, em quais pontos diferençáveis? Para isto, traça os gráficos das funções. Dá a derivada $f'(x)$.

  (a) $f(x) = |x^2 + x|$

  (b) $f(x) = \text{signum}(x) \cdot x^2$

  (c) $f(x) = -x + \sqrt{(x-2)^2}$

Dica: Divide o domínio em intervalos abertos em que as funções podem ser reduzidas a funções cujas derivadas são conhecidas. Depois investiga os pontos de transição (entre os intervalos), forma o limite do lado esquerdo e direito, e aplica Proposição 3.25.

(v) Calcula a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $y = x^3/3 - 2x^2 + 4x - 5^7$

(b) $y = \frac{5x^2 - 3\sqrt{x} + 3x^3\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt[3]{x^2}}$

(c) $y = \sqrt{x\sqrt{3x\sqrt{2x}}}$

(d) $y = \ln|x|$

(e) $\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

(f) $y = \ln|\ln x|$

Qual é a inclinação da reta tangente à curva da primeira função em $x = 0$, da segunda em 1, da terceira em 0, da quarta em 1, das últimas em 0?

(vi) Calcula as primeiras quatro derivada das seguintes funções:

(a) $y = \sin x$

(b) $y = \ln x$

(c) $y = \sqrt{x+1}$

(d) $y = \cos 3x$

Qual é a inclinação da reta tangente à curva da função em $x = 0$? Quais os valores das derivadas de segundo, terceiro e quarto grau em $x = 0$?

(vii) Questões conceituais:

(a) Um objeto mova no pela regra $x(t) = t^3/3 - 2t^2 + 3t$. Determina velocidade e aceleração momentânea do movimento. Quando o objeto muda a sua direção?

(b) Um objeto é arremessado verticalmente para cima de uma altura de $10m$ em cima do chão com uma velocidade momentânea inicial de $20m/s$. Qual altura em cima do chão alcançou depois do tempo t? Determina velocidade e aceleração momentânea do movimento. Depois de quantos segundos atingiu a altura máxima, e qual é essa altura?

(c) A oscilação x de um ponto de massa em volta da sua posição neutra é dada pela regra $x = A\cos \omega t$. Determina velocidade e aceleração momentânea do movimento para $x = \pm A$ e $x = 0$. Mostra que a aceleração a e oscilação x são relacionadas pela equação diferencial $a = -\omega^2 x$.

(d) A energia média-molar de Gibbs de uma mistura de dois enantiomorfos (= isômeros óticos da mesma substância) é dada para uma temperatura constante T por

$$G_m(x) = G_m^\circ + RTx\ln(x) + RT(1-x)\ln(1-x)$$

onde x é a fração molar de um dos enantiomorfos; G_m° é uma constante, R é a constante de gás ideal e T é a temperatura constante. Qual proporção molar entre os enantiomorfos minimiza a energia de Gibbs?

(e) Se um átomo de hidrogénio no segundo estado de energia, a probabilidade de um elétron estar à distancia $\leq r$ do núcleo é proporcional a $4\pi r^2 \psi^2$ 4 onde π é a função de onda orbital dada por

$$\psi(r) = \frac{1}{4\sqrt[2]{2\pi}}(1/a_0)^{3/2}(2 - r/a_0)e^{-r/2a_0}$$

onde $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$m é a constante do *raio de Bohr*.

(1) Encontra os máximos e mínimos de ψ.

(2) Desenha um gráfico aproximativo de ψ; a este fim, descartemos o fator constante e ponhamos $u = r/a_0$ para obter $f(u) = (2-u)e^{-u/2}$.

(3) Encontra os máximos e mínimos de ψ^2.

(4) Desenha um gráfico aproximativo de ψ^2; a este fim, descartemos o fator constante e ponhamos $u = r/a_0$ para obter $f(u) = (2-u)^2 e^{-u}$.

(5) Encontra os máximos e mínimos de $4\pi r^2 \psi^2$.

(6) Desenha um gráfico aproximativo de $4\pi r^2 \psi^2$; a este fim, descartemos o fator constante e ponhamos $u = r/a_0$ para obter $f(u) = (2u - u^2)^2 e^{-u}$.

(f) A probabilidade que uma molécula em um gás tem velocidade momentânea v é proporcional à função

$$f(v) = \pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right)$$

onde m é a massa da molécula, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura na escala de Kelvin. Encontra a velocidade momentânea mais provável, isto é, a velocidade momentânea para a qual este função é máxima. Dá o seu valor para moléculas de nitrogénio à uma temperatura de $T = 298K$.

(g) Conforme a teoria de Planck sobre a radiação de corpos negros, a emissão radial espectral é dada pela fórmula

$$\eta(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}$$

onde λ é o comprimento da onda, h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura na escala de Kelvin. Trata T como constante e encontra uma equação que dá o comprimento de onda da emissão máxima.

(h) A energia termodinâmica de uma coleção de N osciladores harmónicos (isto é, representações aproximativas de vibrações moleculares) é dada por

$$U = \frac{Nh\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

A sua capacidade calorífica é dada pela derivada $C = dU/dT$ de U em T.

(1) Computa a capacidade calorífica.

(2) Encontra o limite da capacidade calorífica para $T \to 0$.

(i) A equação de van der Waals é

$$(P + \frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$

onde

- a é uma constante de coesão;

- b é uma constante de covolume molar;
- n é a quantidade de matéria em mols;
- P é a pressão;
- $R = 8{,}3145\,\mathrm{J/Kmol}$ é a constante universal de gases perfeitos;
- T é a temperatura;
- V é o volume.

Escreve P como função de T, V e n, e calcula $d\mathrm{P}/d\mathrm{V}$ e $d^2\mathrm{P}/d\mathrm{V}^2$. Encontra o ponto de inflexão de P, isto é, onde $d\mathrm{P}/d\mathrm{V}$ e $d^2\mathrm{P}/d\mathrm{V}^2$ são ambos zero.

Soluções

(v) (a) Tem-se $f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$

(b) Tem-se $y = (5/2)x^{4/3} - (3/2)x^{-1/6} + (3/2)x^{31/12}$, logo $dy/dx = (5/2)(4/3)x^{1/3} - (3/2)(-1/6)x^{-7/6} + (3/2)(31/12)x^{19/12}$.

(c) Tem-se $y = \sqrt[4]{3\sqrt[2]{2}}x^{7/8}$, logo $y' = \sqrt[4]{3\sqrt[2]{2}}x^{-1/8}$.

(d) Tem-se $y' = 1/x$ para $x \neq 0$.

(e) Tem-se $f = g \circ h$ com $g = \ln$ e $h(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; Obtemos $(g \circ h)'(x) = 1/(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}})h'(x)$.

Para calcular $h'(x)$, seja $f(x)(= h(x)) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. Tem-se $f(x) = g(h(x))$ onde $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; obtemos $f'(x) = g'(h(x))h'(x) = (1/2)h(x)^{-1/2}h'(x)$.

Para calcular $h'(x)$, seja $f(x)(= h(x)) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; temos $f(x) = g(x)/h(x)$ onde $g(x) = 1 - \sin x$ e $h(x) = 1 + \sin x$, ...

Afinal, obtemos $dy/dx = \frac{\cos x}{\sin^2 x - 1} = -1/\cos x$.

(f) Tem-se

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-\ln x) & \text{, para } 0 < x < 1 \\ \ln(\ln x) & \text{, para } x > 1; \end{cases}$$

logo $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

(vi) (a) Tem-se $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, e $f^{(4)}(x) = \sin x$.

(b) Tem-se $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f'''(x) = -1/2x^3$ e $f^{(4)}(x) = -1/6x^4$ ...

(c) Tem-se $f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16\sqrt{(x+1)^7}}$.

(d) Tem-se $f'(x) = -3\sin 3x$, $f''(x) = -9\cos 3x$, $f'''(x) = 27\sin 3x$ e $f^{(4)}(x) = 81\cos 3x$.

(vii)
(a) Temos a velocidade $x'(t) = 3t^2/3 - 4t + 3$ e aceleração momentânea $x''(t) = 6t/3 - 4$.

(b) Vale $f(t) = 10 + 20t - gt^2$, logo $f'(t) = 20 - 2gt$ e $f''(t) = 2g$. O máximo é atingido no momento t em que $f'(t_0) = 0$, isto é, em que o objeto é parado; isto é, em que a velocidade momentânea negativa, para baixo, obtida incrementalmente pela aceleração gravitacional equivale a velocidade momentânea positiva, para cima, pelo ímpeto inicial. Calculamos $f'(t) = 0$ se, e tão-somente se, $t = 10/g \approx 1$.

(c) Temos a velocidade $x'(t) = -A\omega \sin \omega t$ e a aceleração momentânea $x''(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$. Logo, $x''(t) = -\omega^2 x(t)$

(d) ...

(e)

(1) Mínimo local em $r = 4a_0$

(2) ...

(3) Mínimo local em $r = 3$ e máximo local em $r = 4$

(4) ...

(5) Dois mínimos em $r = 0$ e $r = 2a_0$, e um máximo em $r = 5{,}2361 \cdot a_0$

(6) ...

(f) Obtemos como máximo $v = \sqrt[2]{2k_B T/m}$. A massa molecular é $m = 4{,}652 \cdot 10^{-26}$kg, e o valor da velocidade momentânea mais provável $v = 420.7$m/s

(g) Tem-se $\lambda_{max} = \frac{hc}{k_B T x}$ onde $x \approx 4{,}965$ é a solução para a equação $-5(1 - e^{-x}) + x = 0$.

(h)

(1) Tem-se $C = Nk_B(\frac{hv}{k_B T})^2 \frac{\exp(hv/k_B T)}{(\exp(hv/k_B T)-1)^2}$

(2) Tem-se $C(T) \to 1$ para $T \to 0$.

(i) Tem-se $dP/dV = -nRT/(V-nb)^2 + 2n^2a/V^3$ e $d^2P/dV^2 = 2nRT/(V-nb)^3 + 6n^2a/V^4$. Vale $dP/dV = 0$ se, e tão-somente se, $T = \frac{2n^2a(V-nb)^2}{nRV^3}$. Vale $d^2P/dV^2 = 0$ se, e tão-somente se, $V = 3nb$. Obtemos $P = a/27b^2$.

4. Aproximação pelo polinômio de Taylor e Séries de Potências

4.1. Séries

Definições e exemplos.

Exemplo 4.1. Seja $a_n = 0{,}2^n$ para $n \geq 0$ (vide [P, VI.1]).

Definição 4.2. Dada uma sequência $(a_n) = (a_0, a_1, \ldots)$, define a sequência das somas (s_n) por $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1$ e assim por diante; Interpretamos esta sequência como *somas parciais* de uma soma infinita, chamada de *série (infinita)* e denotamo-la por

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + \cdots .$$

Exemplo 4.3. Vê [P, VI.1.2]

(i) A *série harmônica* definida pelas entradas $a_n = 1/n$.

(ii) A série geométrica definida por $a_n = aq^n$ para um número real positivo $q < 1$.

Definição 4.4. A série infinita $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge*, se a sequência das somas parciais (s_n) converge (a um limite s). Denotamos esta convergência ao limite s por

$$\sum_{n\geq 0} a_n = s.$$

Se a sequência das somas parciais (s_n) não converge, então a série infinita *diverge*.

Nota 4.5.

(i) A série infinita é *determinadamente divergente* se $s = \pm\infty$.

(ii) A série infinita é *absolutamente convergente*, se $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ converge. Uma série absolutamente convergente é convergente, mas o a implicação inversa não vale. Por exemplo, vale, sem demonstração, que $1-1/2+1/3+\cdots = \ln 2$, mas $\sum_{n\geq 0} 1/n = \infty$, porque a soma das entradas $a_{2^n+1}, a_{2^n+1}, \ldots, a^{2^{n+1}}$ é limitada para baixo por $2^n \cdot 2^{n+1} = 1/2$.

(iii) As regras aritméticas para somas finitas (por exemplo, que a soma de duas séries infinitas converge à soma dos seus limites) só valem para séries absolutamente convergentes.

Exemplo 4.6. [P, Exemplo: VI.1.2.1] A série geométrica $\sum_{n\geq 0} q^n = 1+q+q^2+\cdots$ converge para $q<1$ com limite $\frac{1}{1-q}$. Mas para $q \geq 1$ vale $\sum_{n=0}^{N} q^n \geq N$ e logo $\sum_{n\geq 0} q^n = \infty$.

Critérios de Convergência. Por definição $\sum_{n\geq 0} a_n = s$ para um limite s se, e somente se, $s_n \longrightarrow s$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 0$, tal que $|a_0+\cdots+a_n - s| < \varepsilon$ para todos os $n \geq n_0$. Em particular,

$$|a_{n+1}| \leq |a_0+\cdots+a_n+a_{n+1}-s| + |s-a_0+\cdots+a_n| \leq 2\varepsilon.$$

Logo, $a_n \longrightarrow 0$. Isto é, é um critério *necessário*, mas *não suficiente* para $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergir. Por exemplo, $a_n = 1/n \longrightarrow 0$, mas $a_0+a_1+\cdots = \infty$.

Proposição 4.7 (Critério da Maiorante). *Seja $\sum_{n\geq 0} a_n$ uma série infinita com membros positivos. Seja $\sum_{n\geq 0} b_n$ uma série que converge e tal que $a_n \leq b_n$ para todos os $n \geq 0$. Então $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.*

Nota 4.8. Por Proposição 4.7, é suficiente que $a_n \leq b_n$ para todos os $n \geq n_0$ a partir de certo $n_0 \geq 0$.

Exemplo 4.9. [P, Bsp VI 1.3.3] A série infinita $\sum_{n\geq 1} 1/n!$ converge, porque limitada pela série $\sum_{n\geq 0} 1/2^n$, a série geométrica $\sum_{n\geq 0} q^n$ para $q = 1/2 < 1$.

Proposição 4.10 (Critério do Quociente). *Se os membros de uma série infinita $\sum_{n\geq 0} a_n$ com $a_n \neq 0$ para todos os $n \geq 0$ satisfazem*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q < 1,$$

então a série converge. Se $q > 1$, então a série diverge. Se $q = 1$, então pode convergir ou divergir.

Demonstração: Segue do critério da maiorante, porque $\sum_{n\geq 0} a_n$ é a partir de certo $n_0 \geq 0$ limitada pela série geométrica $\sum_{n\geq 0} a\tilde{q}^n$ para $q < \tilde{q} < 1$. ■

Exemplo 4.11. A série infinita $\sum_{n\geq 1} a_n$ para $a_n = 1/n!$ converge, porque $a_{n+1}/a_n = n+1$; logo $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0 < 1$.

4.2. Séries de Potências

Definição 4.12. Uma *Série de Potências* é uma série da forma

$$P(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + \cdots .$$

O ponto de abcissa x_0 é ***o ponto de expansão*** e os números reais $a_0, a_1, \ldots$ são os *coeficientes da série de potências.*

Exemplo 4.13.

(i) $P(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$.

(ii) $P(x) = \sum_{n \geq 0} x^n / n! = 1 + x + x^2/2! + \cdots$.

(iii) $P(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (x-1)^n / n = \frac{x-1}{n} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$

Proposição 4.14 (Definição e Teorema). *Para toda série de potências $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ existe $r \geq 0$, o* raio de convergência*, tal que*

(i) *A série de potências converge em todo lugar em $]x_0 - r, x_0 + r[$.*

(ii) *A série de potências diverge para todos os $x \in \mathbb{R}$ com $|x - x_0| > r$.*

Porém, se $|x - x_0| = r$, então pode convergir ou divergir.

Nota 4.15. Para $x = 0$ vale $P(0) = a_0$. Existem

- séries de potências, que convergem só para $x = 0$, e
- séries que convergem para todos os x em $\mathbb{R}$; por exemplo, $P(x) = \sum_{n \geq 0} n! x^n$.

Proposição 4.16. *O raio de convergência $r \geq 0$ para uma série de potências $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ pode ser calculada por*

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Demonstração: Escreve $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n \geq 0} b_n$ para $b_n := a_n (x - x_0)^n$. Pelo critério de quociente, a série $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge se

$$\lim_{n \to \infty} |b_{n+1}/b_n| = |x - x_0| \cdot |a_{n+1}/a_n| = |x - x_0| \lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n|$$

e diverge, se > 1. Isto vale se, e somente se, $|x - x_0| < r$ respetivamente $|x - x_0| > r$. ∎

Exemplo 4.17. [P, Exemplo: IV.2.2]

(i) A série geométrica $\sum_{n\geq 0} x^n$ tem raio de convergência $r = 1$.

(ii) A série de potências $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ tem raio de convergência

$$r = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$

4.3. Polinômios de Taylor

Recordemo-nos de que a reta tangente é uma aproximação linear (isto é, multiplicação por um escalar) de f no ponto de abcissa x_0 como mostra Figura 4.1: quanto mais próximo x de x_0, tanto mais próximos são os seus valores dos de f.

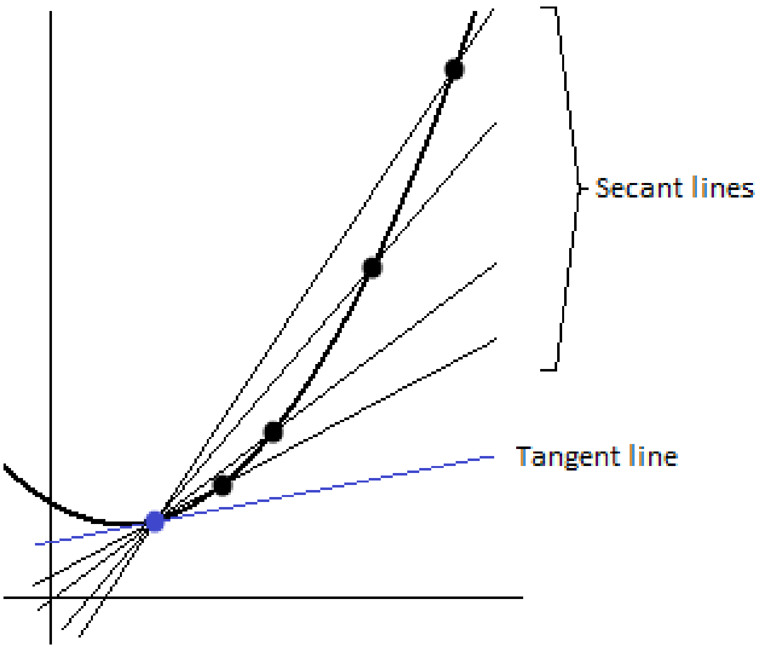


Figura 4.1.: Reta secante no ponto de abcissa x_0

O nosso objetivo agora é aproximar f por

(i) uma função linear (= polinómio de primeiro grau),

(ii) polinómio de segundo grau, e

(iii) polinómio de terceiro grau

Determina os coeficientes $a_0, \dots, a_N$ do polinômio por igualar as derivadas de f e P_N no ponto de abcissa x_0 (assim obtemos funções cujas derivadas são próximas).

Então,

- $P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ é a reta tangente em x_0,
- $P_2(x_0) = 2 \cdot a_2 = f^{(2)}(x_0)$, e
- mais geralmente $P_N(x_0) = n! a_N = f^{(N)}(x_0)$.

Por exemplo, para o seno $\sin(x)$, obtemos os coeficientes

$$\sum_{n=0,1,2,3,4} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

e a aproximação ao seu gráfico por um polinômio de grau 4 em Figura 4.2:

A https://www.desmos.com/calculator/noanuckuli permite ver a aproximação ao polinômio de Taylor à função quando o seu grau aumenta.

Definição 4.18. Seja f uma função, que é no ponto de abcissa x_0 pelo menos N vezes diferençável. Então

$$P_N(x) = \sum_{n=0,\dots,N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é o N-*ésimo polinômio de Taylor de f no ponto de expansão* x_0.

4.4. Série de Taylor

Definição 4.19. A série

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é a *série de Taylor* de $f(x)$ no ponto de expansão x_0.

Nota 4.20.

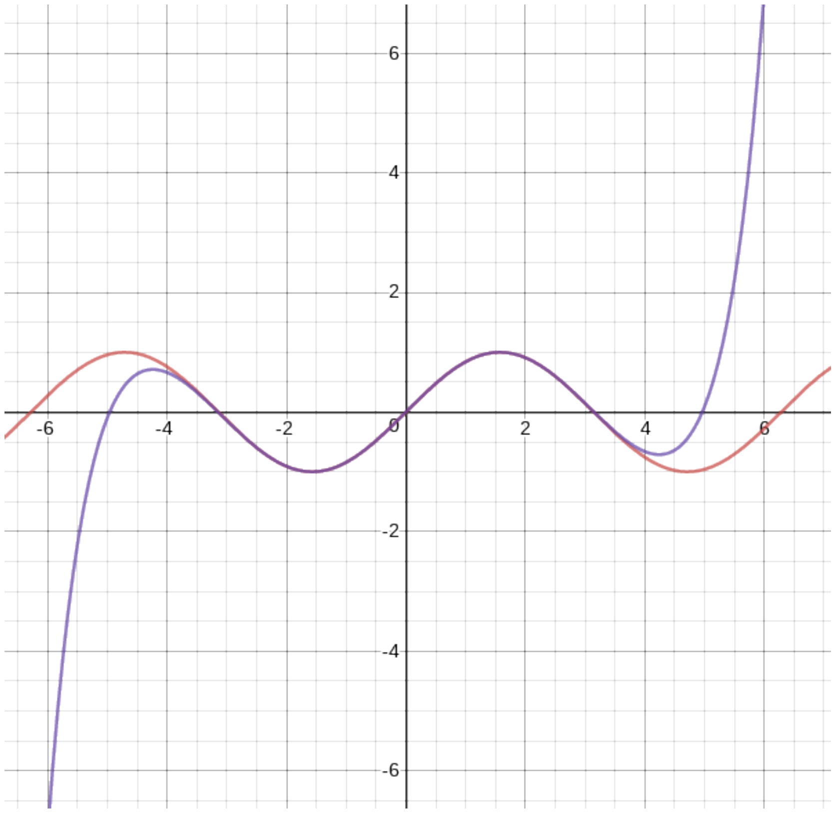


Figura 4.2.: A aproximação ao seno por um polinômio de grau 4.

(i) O raio de convergência r da série de Taylor pode ser determinada pela fórmula em Proposição 4.7.

(ii) Ocorre que a série de Taylor tem um raio de convergência positivo, mas não coincide com a função! Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leq 0. \end{cases}$$

Nas funções que estudamos, a série de Taylor converge sempre ao valor da função.

Exemplo 4.21.

(i) Para $f(x) = e^x$ em $x_0 = 0$, obtemos $f^{(n)}(0) = 1$ e logo

$$e^x = \sum_{n \geq 0} x^n / n!.$$

(ii) Para $f(x) = \ln(1+x)$ em $x_0 = 0$ obtemos $f(0) = 0$ e $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ (vide [P, Exemplo: VI.3.2.2]) e logo

$$\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}/nx^n.$$

Proposição 4.22. *Derivadas de série de potências Toda série de potências* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *com raio de convergência* $r \geq 0$ *é diferençável em* $]x_0 - r, x_0 + r[$ *e a sua representada é dada pela série de potências*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} a_n n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

com o mesmo raio de convergência r.

Exemplo 4.23. Se derivamos $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$, então obtemos

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1}/(n-1)! = \sum_{n\geq 0} x^n/n!.$$

Exercício

(i) (a) Expande $f(x) = 3 + 11x - 9x^2 + 2x^3$ pela fórmula de Taylor em uma soma de potências de $(x - 2)$.

(b) Expande o polinômio de Taylor de $f(x)$ no ponto de abcissa x_0 até o n-ésimo coeficiente inclusivo.

(i) $f(x) = e^{2x-x^2}$ em $x_0 = 0$ para $n = 3$.

(ii) $f(x) = x^x - 1$ em $x_0 = 1$ para $n = 3$.

(iii) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ para $x_0 = 0$ e $n = 4$.

(ii) Determina a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ no ponto de abcissa $x_0 = 0$. Qual é o raio de convergência desta série?

(iii) Determina a série de Taylor de $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$ no ponto de abcissa $x_0 = 0$ e mostra assim que $\sin' x = \cos x$.

(iv) Determina pelo critério de quociente a convergência das séries

(a) $2+2^2/2^{15}+2^3/3^{15}+2^4/4^{15}+\cdots$

(b) $2/3 + 4/9 + 6/27 + 8/81 + \cdots$

(c) $1+2/2!+4/3!+8/4!+16/5!+\cdots$

(d) $\sum_{k\geq 1} \frac{2k^2}{(k+1)\cdot 3^k}$

(e) $1^2/2!+2^3/3!+3^4/4!+4^5/5!+\cdots$

(v) Determina se, e caso sim, onde, as seguintes séries convergem:

(a) $1/2 + 2/5 + 3/8 + 4/11 + \cdots$

(b) $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \cdots$

(c) $\frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^4} + \frac{1}{1+2^6} + \frac{1}{1+2^8} + \cdots$

Dica para (c): compara com uma série geométrica apropriada.

Soluções

(i) (a) $f(x) = 5 - (x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-3)^2$

   (b) (1) $f(x) = 1 + 2x + x^2 - 2/3x^3$

      (2) $f(x) = (x-1) + (x-1)^2 + 1/2(x-1)^3$

      (3) $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$

(ii) $f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ e $r = 1$.

(iii) $\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot x^{2n+1}/(2n+1)!$ e $\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}/(2n!)$, logo $\sin' x = \cos x$ com o teorema sobre a derivada de séries de potências.

(iv) (a) divergente
   (b) convergente
   (c) convergente
   (d) convergente
   (e) divergente

(v) (a) diverge, porque $a_n \to 1/3 \neq 0$.

   (b) converge, porque limitado em cada parcale pela série $\sum_{n \geq 1} b_n$ com $b_n = (1/n^2)$.

   (c) converge, porque limitado em cada parcale pela série $\sum_{n \geq 1} b_n$ com $b_n = (1/2)^n$, a série geométrica para $q = 1/2$ (que começa em $n = 1$).

5. Gráficos

A questão mais interessante em aplicações é a da localização dos extremos do gráfico porque releva a questão de otimizar, maximizar ou minimizar certa quantia (= o valor da função).

5.1. Monotonia

Proposição (Teorema do Valor Médio). *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathrm{I}$ *contínua e diferençável em* $]a,b[$. *Então existe* $\xi \in]a,b[$ *com*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

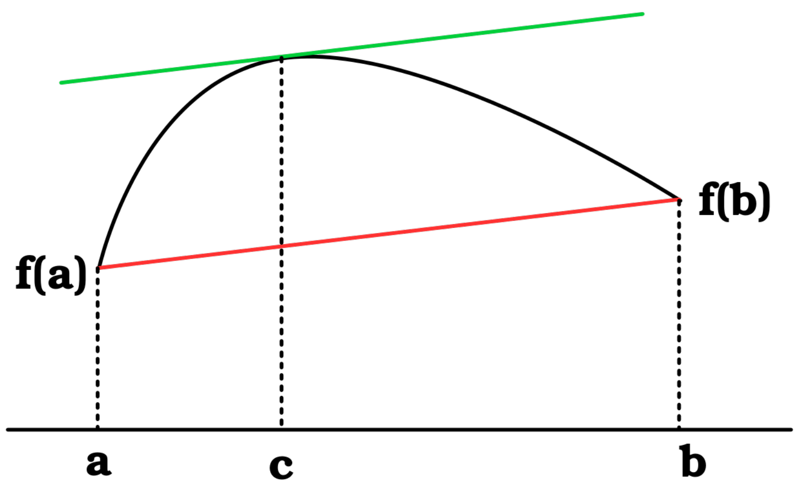


Figura 5.1.: O Teorema do Valor Médio

A primeira derivada $f'(x)$ é a inclinação (ou coeficiente angular) da tangente em x; logo:

Proposição 5.1. *A função f seja no intervalo* I *diferençável. Temos*

(i) $f'(x) \geq 0$ *para todos os* $x \in \mathrm{I}$ $\iff$ f *cresce monotonamente em* I, *e*

(ii) $f'(x) \leq 0$ *para todos os* $x \in \mathrm{I}$ $\iff$ f *decresce em* I *monotonamente.*

Demonstração: " $\implies$ ": Para pontos de abcissa $x,y \in \mathrm{I}$ existe, pelo Teorema do Valor Médio,ξ entre x e y, tal que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(\xi).$$

" $\impliedby$ ": Como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

vemos que $f(x+h) - f(x) \geq 0$ implica $f'(x) \geq 0$. ■

Proposição 5.2. *A função f seja diferençável no intervalo* I. *Temos*

(i) $f'(x) > 0$ *para todos os* $x \in \mathrm{I}$ $\implies$ f *cresce em* I *de modo estritamente monótono.*

(ii) $f'(x) < 0$ *para todos os* $x \in \mathrm{I}$ $\implies$ f *decresce em* I *de modo estritamente monótono.*

Demonstração: " $\implies$ ": Como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ para todo h com $|h| \leq \delta$. Por isso, $f(y) > f(x)$ para $y \in [x, x+\delta]$. Como vale para todos os $x \in \mathrm{I}$, por exemplo, $\tilde{x} = x + \delta$, necessariamente $f(y) > f(x)$ para todos os $x \in \mathrm{I}$. Pelo Teorema do Valor médio, existe para quaisquer pontos de abcissa $x,y \in \mathrm{I}$ um ξ entre x e y, tal que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(\xi).$$

■

Nota 5.3. Proposição 5.1 postula uma *equivalência*, enquanto Proposição 5.2 postula uma *implicação.* Em outras palavras, a condição $f'(x) \geq 0$ ou $f'(x) \leq 0$ é *suficiente e necessária* para a monotonia de f, enquanto a condição $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ é só *suficiente* para a monotonia estrita de f.

Proposição 5.2 é de fato só uma condição suficiente, mostra o seguinte contra-exemplo: A função $f(x) = x^3$ cresce estritamente em $\mathrm{D} = \mathbb{R}$, porém, vale $f'(0) = 0$.

Exemplo 5.4. Seja $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3((x + 1/3)^2 + 2/9) > 0$ para todos os $x \in \mathrm{R}$, obtemos que f cresce de modo estritamente monótono.

5.2. Extremos locais

Recordemo-nos da noção do mínimo e máximo local:

Definição. A função $f : D \to I$ tem no ponto de abcissa x_0 um *máximo respectivamente mínimo* local, se existe um intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ respetivamente $f(x_0) \leq f(x)$ para todos os x neste intervalo.

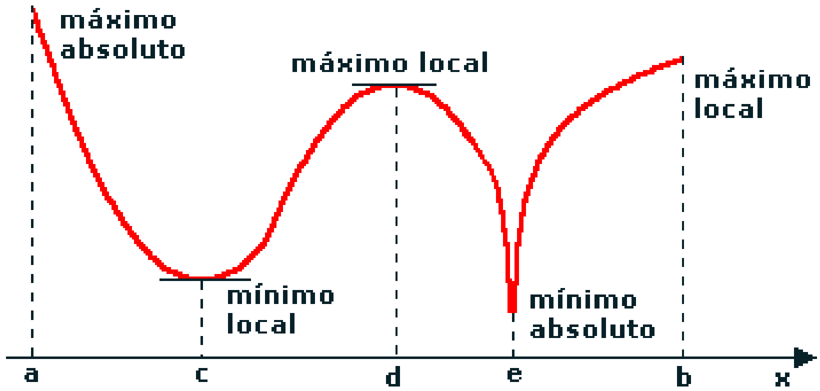


Figura 5.2.: Extremos locais e globais (ou *absolutos*).

Nota 5.5.

(i) Usamos o termo genérico *extremos* para máximos e mínimos.

(ii) O ponto do gráfico $(x, f(x))$ para um máximo ou mínimo x é então o ponto mais alto ou baixo do gráfico (em uma vizinhança de x).

(iii) Uma função pode ter múltiplos máximos e mínimos locais: Por exemplo, o gráfico de $\sin x$ tem uma infinidade de extremos locais como mostra Figura 5.3; mais exatamente, máximos respetivamente mínimos locais nos pontos $\pi(1/2 + 2k)$ respetivamente $\pi(3/2 + 2k)$ com os valores 1 e -1.

A reta tangente em um mínimo (respetivamente) x_0 tem inclinação 0, isto é, é horizontal, pois: Antes de x_0, a inclinação m é positiva (respetivamente negativa), e depois de x_0 negativa (respetivamente positiva). Por causa da continuidade da derivada, $m = 0$ em x_0.

Proposição (Teorema de Fermat). *Seja $f :]a, b[\to I$ e em x_0 diferençável. Se f tem no ponto de abcissa x_0 um mínimo ou máximo local, então* $f'(x_0) = 0$.

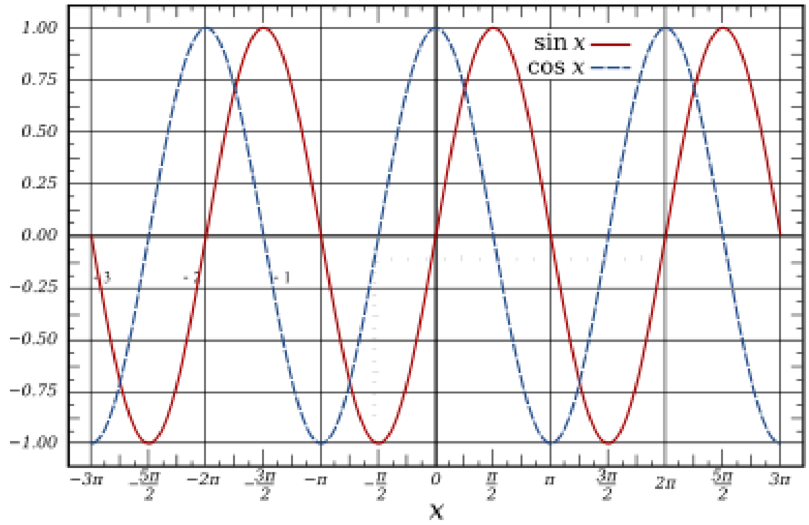


Figura 5.3.: Os extremos locais periódicos do seno e co-seno.

Demonstração: Tem-se $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ para $h > 0$ e $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ para $h > 0$. Então

$$0 \leq f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0;$$

isto é, necessariamente $f'(x_0) = 0$. ■

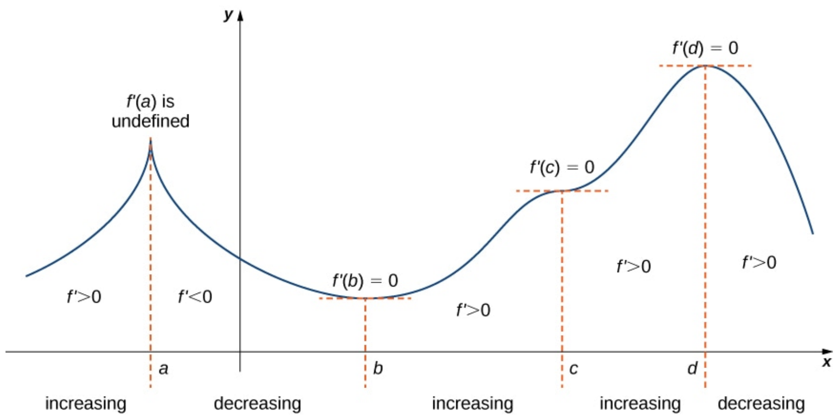


Figura 5.4.: As subidas e descidas do gráfico interpretadas pelos valores da derivada.

Nota 5.6. A condição $f'(x_0) = 0$ é necessária, porém, não é suficiente para f ter um extremo local em x_0: Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ não tem em 0 um extremo local, mas $f'(0) = 0$!

Trata-se de um *ponto de sela* como o ponto de abcissa $x = c$ em Figura 5.4. Isto é, a inclinação afinal não muda a sua direção (para baixo ou para cima), isto é, o coeficiente angular não muda o seu sinal.

Proposição 5.7 (Condição suficiente para ein lokales Extremum). *Seja a função $f(x)$ duas vezes diferençável no ponto de abcissa x_0. Se*

$$f'(x_0) = 0 \quad e \quad f''(x_0) \neq 0,$$

então x_0 é um extremo local. Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um mínimo, e se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um máximo local.

Exemplo 5.8.

(i) A parábola $f(x) = x^2$ tem em $x_0 = 0$ um mínimo local, mesmo um *mínimo global*, isto é, o ponto maix baixo do gráfico ou o valor da função menor no seu domínio inteiro.

(ii) Mais geralmente, seja $f(x)$ um polinómio de grau n. Se x_0 é uma raiz x_0 dupla, isto é, $(x - x_0)^2$ divide $f(x)$, então $f(x)$ tem em x_0 um extremo local ([P, Exemplo 3.4.1(4)]).

(iii) Para a função $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ e o seu gráfico, vide [P, Exemplo: 3.4.1.(2)].

É bem capaz, por exemplo, para a função $f(x) = x^4$, que a função tem em $x_0 = 0$ um mínimo local, mas $f''(x_0) = 0$. Para garantir um extremo, precisamos de olhar o valor da terceira derivada $f'''(x_0)$. Em geral:

Proposição 5.9 (Condição suficiente para um extremo local se $f''(x_0) = 0$). *Seja $f(x)$ n-vezes diferençável e vale $f'(x_0) = 0$ no ponto de abcissa x_0. Seja n_0 um mínimo $n > 2$ tal que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Se n_0 é par e*

- *se $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é um mínimo, e*
- *se $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é um máximo.*

Exemplo 5.10. Vide [P, 3.4.3] para os exemplos x^4 e x^5.

Proposição 5.11 (Condição suficiente para um extremo local se x_0 é salto). *A função $f(x)$ tem no ponto de abcissa x_0 um extremo local, se $f'(x)$ muda o seu sinal, isto é, existe $\delta > 0$ tal que*

- *ou* $f'(x) > 0$ *para todos os* $x \in]x_0 - \delta, x_0[$,
- *e* $f'(x) < 0$ *para todos* $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

ou

- *tal que* $f'(x) < 0$ *para todos os* $x \in]x_0 - \delta, x_0[$,
- *e* $f'(x) > 0$ *para todos* $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

No primeiro caso, trata-se de um mínimo, e no segundo caso de um máximo.

Nota 5.12.

(i) Infelizmente, isto é tão pouco um critério suficiente para a existência de um extremo como mostra a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin(\pi/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

De fato $f(x)$ tem no ponto de abcissa $x = 0$ um mínimo absoluto, mas o critério Proposição 5.11 não se aplica, vide [FF, Exemplo: 8.74].

(ii) Porém, este critério oferece duas vantagens em comparação ao anterior:

(i) Vale em mais generalidade porque inclui saltos (= pontos indefinidos), e

(ii) necessita menos computação.

Exemplo 5.13.

(i) Podemos agora demonstrar, que a função $f(x) = |x|$ tem em $x_0 = 0$ um mínimo.

(ii) Calculamos os extremos de

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Tem cúspides em -1 e 1, isto é, inclinação infinita, e logo não é diferençável ali; porém, tem ali extremos como mostra Proposição 5.11.

Procedemos como segue para encontrar os extremos de um gráfico:

(i) Determinemos, como condição *necessária* para extremos *locais* os zeros x_0 da primeira derivada, isto é, os x_0 onde $f'(x_0) = 0$.

(ii) Determinemos as cúspides, isto é, os pontos de abcissa x_0 em que f não é diferençável.

(iii) Apliquemos os critérios suficientes apresentados.

5.3. Curvatura e Pontos de Inflexão

A segunda derivada $f''(x)$ é a derivada da primeira derivada $f'(x)$. Por isso, indica quão rapidamente a inclinação muda ao longo do eixo-x. Se cresce, então a curva é curvada para a esquerda, se decresce, então para a direita. Por Proposição 5.1, obtemos:

Nota 5.14. [P, Imagem 3.3.3]

(i) $f''(x) \geq 0, \iff$ gráfico convexo (= curvatura para a direita)

(ii) $f''(x) \leq 0, \iff$ gráfico côncavo (= curvatura para a esquerda)

Exemplo 5.15.

(i) Se $f(x) = mx + b$ é linear, então $f''(x) = 0$. Isto é, a função nunca muda a sua inclinação m, isto é, m permanece constante.

(ii) A curva de $f(x) = \ln(x)$ é curvada para a esquerda. De fato, $f''(x) = -1/x^2 < 0$ para todos os $x > 0$.

Definição 5.16. Seja $f(x)$ duas vezes diferençável. Um ponto de abcissa x_0 é um ***ponto de inflexão*** se o sentido de rotação da reta tangente em x_0 muda. Matematicamente, f'' muda o seu sinal em x_0, isto é, $f''(x_0) = 0$.

Se x_0 é um ponto de inflexão, em particular, $f''(x_0) = 0$, e a reta tangente é horizontal, isto é, $f'(x_0) = 0$, o ponto de abcissa x_0 é chamada de ***ponto de sela***.

Proposição 5.17.

(i) *Se x_0 é um ponto de inflexão, então $f''(x_0) = 0$. (Isto é, é uma condição necessária.)*

(ii) *Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então o ponto de abcissa x_0 é um ponto de inflexão (Isto é, é uma condição suficiente.)*

Nota 5.18. Para a mudança do sinal a derivada f'' não precisa de ser definida no ponto de inflexão x_0! Por exemplo, se $f(x) = x|x|$, então $f'(x) = 2|x|$, e $f''(x)$ não é definida em $x_0 = 0$; porém o seu sinal muda em x_0!

Exemplo 5.19.

(i) As funções trigonométricas tem como pontos de inflexão os zero: Seja $f(x) = \sin x$ e o intervalo $[0{,}2\pi[$. Vale $f''(x) = -\sin x$ e $f'''(x) = -\cos x$; logo obtemos os pontos de inflexão (que não são pontos de sela!) $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$. Vide [P, Exemplo 3.4.2. (1)].

(ii) A função $f(x) = -2/3x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ tem no ponto de abcissa $x_0 = 1$ um *ponto de sela*, vide [P, Exemplo 3.4.2. (2)].

5.4. Desenhar gráficos

Queremos desenhar gráficos pela obtenção de tantas propriedades da função quanto possível:

(i) O domínio, eventualmente a análise de brechas (como brechas extensíveis, saltos, polos com ou sem mudança de sinal) A este fim, vide Definição 2.7 e Secção 2.4.

(ii) Eventualmente a análise da simetria, periodicidade e monotonia.

(iii) Pontos de interseção com os eixos-x e y. Isto é, calcula $f(0)$ e encontra os x_0 onde $f(x_0) = 0$.

(iv) Extremos locais. A este fim, vide Secção 5.2.

(v) Pontos de inflexão e as retas tangentes neles. A este fim, vide Secção 5.3.

(vi) Limites à borda do domínio: $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to b} f(x)$ se $\mathrm{D} =]a,b[$ com $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. A este fim, se a ou b são infinitos, vide Definição 2.1 e Definição 2.4, caso contrário vide Definição 2.7.

(vii) Imagem da função

Exercício

(i) Determina para as funções seguintes o domínio máximo de definição, os extremos locais e os intervalos em que crescem ou decrescem monotonamente:

(a) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4}$ (b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ (c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(ii) Em quais intervalos são os gráficos das seguintes funções convexos ou côncavos?

(a) $f(x) = x^3$. (b) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ para $x \neq -1,1$.

(iii) Determina o valor máximo e mínimo das seguintes funções no seu domínio:

(a) $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$ com $D = [0,10]$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ com $D = [-3/2, 5/2]$

(iv) Aplica os passos da enumeração em Secção 5.4 e desenha em seguida os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$

(b) $f(x) = \frac{x^2+x+14}{x+2}$

(c) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = xe^x$

(v) Uma área retangular que borda a uma casa é circundada por uma cerca de 120 metros tal que esta área seja máxima. Determina a base e altura desta área.

(vi) O corte transversal de um túnel tenha a forma de um retângulo com um semicírculo posto acima. A circunferência do corte seja 18 metros. Qual raio do semicírculo maximiza a área do corte?

(vii) Dois corredores de uma largura de 2,4 e 1,6 metros se intersectam em um ângulo reto. Determina o maior comprimento de uma escada de mão que pode ser levada em posição horizontal de um corredor ao outro.

(viii) Um quadro seja pendurado na parede. A sua borda inferior e superior sejam em uma altura a e b metros acima do olho de um mirador. Em qual distância à parede deve o mirador ser para ver o quadro sob um ângulo máximo?

(ix) Como reunir $n = 48$ elementos iguais, cada um com uma resistência interna de $R_i = 0{,}25\Omega$, a uma bateria, para a resistência exterior de $R_a = 3\Omega$ absorver uma potência máxima? Dica: A bateria consista de y grupos paralelos de cada um x elementos sucessivos.

Soluções

(i)

(a) $D = \mathbb{R} - \{0\}, x_{\max} = -1{,}1$, cresce de modo estritamente monótono em $]-\infty,-1[\cup]0{,}1[$, decresce de modo estritamente monótono em $]-1{,}0[\cup]1{,}\infty[$.

(b) $D = [-1{,}1]$, $x_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{\max} = \sqrt{2}2$, decresce de modo estritamente monótono em $]-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2},1[$, cresce de modo estritamente monótono em $]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}[$.

(ii)

(a) Em $]0{,}\infty[$ estritamente convexo, em $]-\infty{,}0[$ estritamente côncavo.

(b) Em $]-\infty,-1[\cup]0{,}1[$ estritamente convexo, em $]-1{,}0[\cup]1{,}\infty[$ estritamente côncavo.

(iii)

(a) $f(5) = 4$ e $f(0) = f(10) = 0$ (b) $f(5/2) = 111/8$ e $f(1) = 1$

(iv)

(a) domínio $D = I = \mathbb{R}$, zeros $x_1 = 0$ e $x_1 = 3$, máximos e mínimos $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 2$, ponto de inflexão $x_i = 1$ com $t_i(x) = -6x + 2$, limites $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(b) domínio $D =]-\infty,-2]\cup]-2{,}\infty[$, imagem $I =]-\infty,-11]\cup[5{,}\infty[$, nenhum zero, assimptota $A(x) = x-1, x_P = -2$, máximos e mínimos $x_{\max} = -6$ e $x_{\min} = 2$, nenhum ponto de inflexão.

(c) domínio $D =]0{,}\infty[$, imagem $I =]0{,}2]$, nenhum zero, nenhum polo, máximo $x_{\max} = 0$, limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, pontos de inflexão $x_i = \pm 1$, $t_i(x) = \pm 3/4x + 2{,}25$.

(d) domínio $D = \mathbb{R}$, imagem $I = [-1/e, \infty[$, $x_N = 0$, limites $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, mínimo $x_{\min} = -1$, ponto de inflexão $x_i = -2$ com $t_i(x) = -e^{-2}x - 4e^{-2}$.

(v) 30×60 metros quadrados.

(vi) $\frac{18}{4+\pi}$ metros

(vii) Cerca de 5,619 metros

(viii) $\sqrt{ab}$

(ix) Dois grupos com 24 elementos.

6. Integrais

Neste capítulo, aproximaremos a área abaixo de uma curva (até o eixo-x) por fitas mais e mais finas como em Figura 6.1.

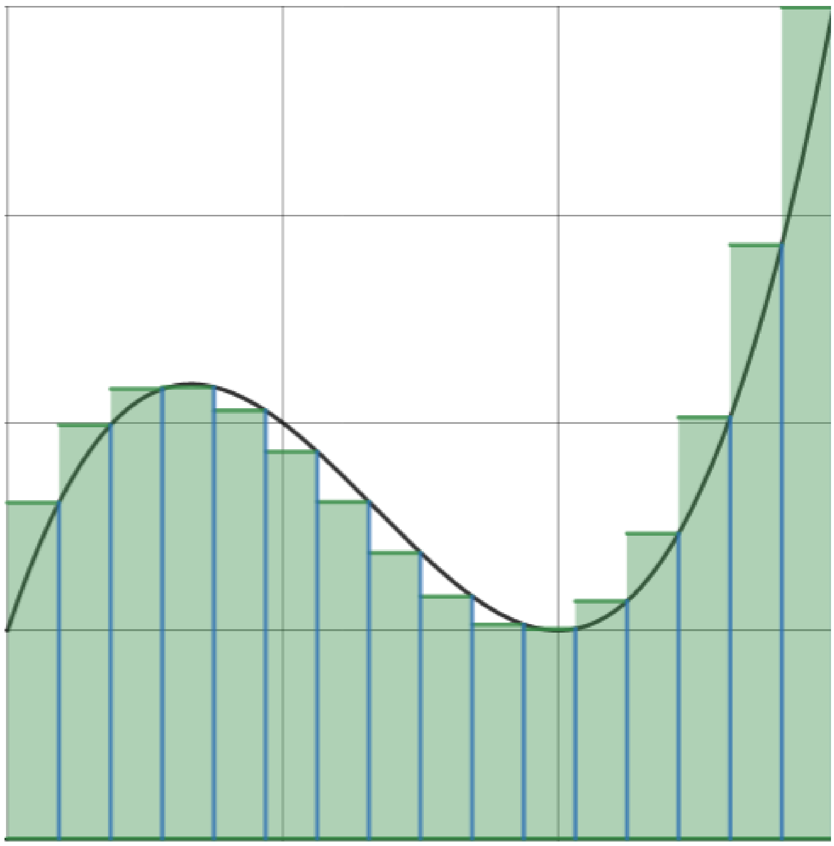


Figura 6.1.: Fitas mais e mais finas aproximam-se da área abaixo da curva.

Exemplo 6.1.

(i) Calculemos a soma à direta e à esquerda da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1,2]$ para $n = 5$ fitas, vide [P, Bsp V.2.1].

(ii) Uma tabela para $n = 5{,}10,\ldots,1000$ mostra a aproximação em etapas da área, vide [P, Fim V.2.1].

(iii) Para uma função $f(x)$ arbitrária e um número de fitas n arbitrário, vide
- `https://www.desmos.com/calculator/tgyr42ezjq`,
- `https://www.desmos.com/calculator/c5seq9ltar`, ou
- `https://www.geogebra.org/m/qrgbJExb`.

Em geral, obtemos para a função $f(x)$ no intervalo $[a{,}b]$ a soma à esquerda $\mathrm{E}_n = \sum_{k=0,\ldots,n-1} f(x_k)\Delta x_k$ e soma à direta $\mathrm{D}_n = \sum_{k=1,\ldots,n} f(x_k)\Delta x_k$. Isto é, E_n cresce e D_n decresce para $n \to \infty$ monotonamente. Se a função tem só um número finito de pulos (= pontos de descontinuidade), isto é, f é *contínua por troços*, então $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_n$ e definamos este limite como $\int_a^b f(x)$. (Historicamente, o símbolo anguloso Σ da soma deu lugar ao símbolo curvado da integral $\int$.)

Definição 6.2. Se a função $f(t)$ tem no intervalo $[a{,}b]$ somente um número finito de pulos, então o limite das somas

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_n \quad \text{com} \quad \mathrm{E}_n = \sum_{k=0,\ldots,n-1} f(t_k)\Delta t_k$$

existe, e chamamo-lo de *integral (determinada) da função $f(t)$ entre a e b*. Se a cota superior do intervalo b é considerada como variável, então chamamo-la de *integral indeterminada* $\mathrm{I}(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, uma função em b que mede a área entre o eixo-x e a curva da função f no intervalo $[a{,}b]$.

6.1. Teorema Fundamental do Cálculo

Proposição 6.3. *Seja f uma função contínua. Toda integral indeterminada* $\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *é uma* função primitiva *de $f(x)$, isto é,*

$$\mathrm{I}'(x) = f(x).$$

Demonstração: Tem-se $\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Podemos estimar a área $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ por $hf(t_{\min})$ para baixo e por $hf(t_{\max})$ para cima; aqui $t_{\min}$ e

$t_{\max}$ sejam o mínimo e máximo de $f(t)$ no intervalo $[x, x+h]$. Pelo Teorema de valor intermediário,

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(t_0) \quad \text{para algum } t_0 \in [x, x+h].$$

Segue

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(t_0) = f(x),$$

pois $x \leq t_0 \leq x + h$ e $h \to 0$. ■

Isto é, a função F que devolve a área abaixo da curva da função f até certo ponto é uma *antiderivada* de f, isto é, $F' = f$. Podemos aproximá-la por fitas mais e mais finas que aproximam esta área, como acontece em Figura 6.2.

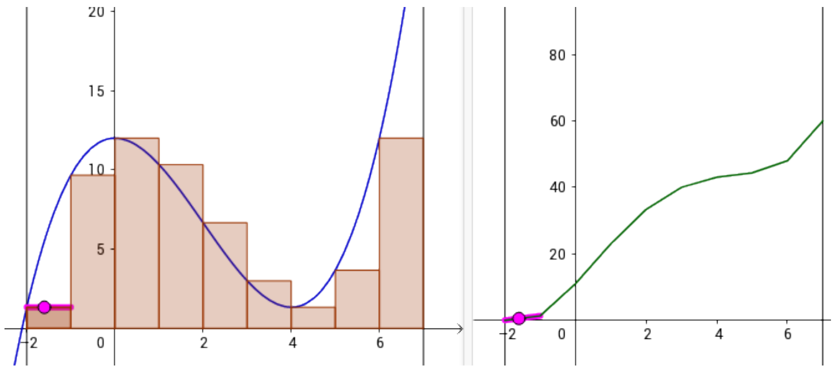


Figura 6.2.: A antiderivada como área aproximativa abaixo da curva da função.

O site https://mathinsight.org/calculating_area_under_curve_riemann_sums mostra como a função dada pela área aproximativa (das somas das áreas das fitas) se aproxima por fitas mais e mais finas da função primitiva.

Porém, veremos que existem receitas bem mais elegantes para calcular a antiderivada.

Definição 6.4. Toda função primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ é denotada por $\int f(x)\,dx$ (e todas elas são, exceto adição por uma constante C, iguais).

Exemplo 6.5.

(i) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(ii) $\int e^x \, dx = e^x + C$

(iii) $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Proposição 6.6. *Seja* $F(x)$ *uma função primitiva da função contínua* $f(x)$ *em* $[a,b]$. *Temos*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Observamos acima que $\int_a^x f(x) \, dx = F(x) + C_0$ para uma constante C_0. Mais exatamente, $F(a) + C_0 = \int_a^a f(x) \, dx = 0$, logo $C_0 = -F(a)$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x) = F(b) + C_0 = F(b) - F(a).$$

Exemplo 6.7. Calculamos $\int_1^2 1/x \, dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

6.2. Computação das Funções primitivas

Proposição 6.8. *Linearidade Sejam* $f(x), g(x)$ *contínuas.*

- *Tem-se* $c \int f(x) \, dx = \int c f(x) \, dx$ *para todos os* $c \in \mathbb{R}$.
- *Tem-se* $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

Exemplo 6.9. Segue $\int x^2 + 2 \sin x \, dx = \int x^2 \, dx + 2 \int \sin x \, dx = 1/3 x^3 - 2 \cos x + C$.

Proposição 6.10. *Limites do Intervalo Seja* $f(x)$ *uma função contínua definida sobre o intervalo* $[a,b]$. *Temos*

- *Tem-se* $\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$, *e*
- *Se* $[a,b] = [a,m] \cup [m,c]$, *então* $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^m f(x) \, dx + \int_m^c f(x) \, dx$.

Demonstração: Vide [P, V.7]. ■

Integração Parcial.

Proposição 6.11 (Integração parcial ou regra de produto). *Sejam as funções f,g continuamente diferençáveis. Temos*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Demonstração: Temos de mostrar que $\mathrm{H}(x) := f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ é uma função primitiva de $h(x) = f'(x)g(x)$. Calculamos

$$\mathrm{H}'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x) = h(x).$$

■

Esta regra ajuda na computação de $h(x) = \tilde{f}(x)g(x)$, se

(i) a função primitiva $f(x)$ de $\tilde{f}(x) = f'(x)$ é facilmente computável, por exemplo, $\tilde{f}(x) = e^x$,

(ii) a função primitiva $\int f(x)g'(x)\,dx$ é mais facilmente computável do que $\int f'(x)g(x)\,dx$, por exemplo, se $g(x)$ é uma função linear e por isso $g'(x) = c$ para uma constante c.

Exemplo 6.12.

(i) Determinemos $\int x \sin x\,dx$. Ponhamos $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = x$. Então vale

$$\int x\sin x\,dx = -\cos x \cdot x - \int -\cos x = -\cos x \cdot x + \sin x + \mathrm{C}.$$

(ii) Determinemos $\int x^2 e^x\,dx$. Ponhamos $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$. Então vale

$$\int x^2 e^x\,dx = e^x x^2 - \int e^x 2x\,dx = e^x x^2 - 2\int e^x x\,dx.$$

Apliquemos novamente integração parcial a $\int e^x x\,dx$ com $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$, e obtemos

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x = e^x(x-1).$$

Logo

$$\int x^2 e^x\,dx = e^x x^2 - 2e^x(x-1) = e^x(x^2 - 2x + 2).$$

Estamos na situação seguinte: Temos de determinar a função primitiva de uma função do tipo $\tilde{f}(x) = f(u(x)) \cdot v(x)$. Se consigamos mostrar $v(x) = c \cdot u'(x)$ para uma constante $c \in \mathbb{R}$, então a função primitiva de $\tilde{f}(x) = c \cdot f(u(x))u'(x)$ é calculado como segue:

(i) Determina a função primitiva F de f, e

(ii) Determina a função primitiva de $\tilde{f}$ por $\tilde{\mathrm{F}} = c \cdot \mathrm{F} \circ u$.

Regra de Substituição.

Proposição 6.13 (Regra de Substituição ou Regra de Cadeia inversa). *Seja $f(u)$ contínua, $u = g(x)$ continuamente diferençável e exista a composição $f \circ g$. Então vale*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du \quad \text{com } u = g(x)$$

onde o lado direito denota a função $\mathrm{F}(g(x))$ *para uma função primitiva* $\mathrm{F}(x)$ *de* $f(x)$.

Demonstração: Seja $\mathrm{F}(x)$ uma função primitiva de $f(x)$. Pela Regra da Cadeia,

$$\mathrm{F}(g(x))' = \mathrm{F}'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Logo $\mathrm{F}(g(x))$ é uma função primitiva de $f(g(x))g'(x)$. ■

Nota 6.14.

(i) Se denotemos $u'(x) = du(x)/dx$, então a regra de substituição diz que

$$\int f(u(x))du(x)/dx \cdot dx = \int f(u)du.$$

Isto é, a regra de substituição é uma regra de cancelamento.

(ii) Na integral determinada vale sob as condições acima que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Isto é, fizemos a substituição $u = g(x)$ pela substituição dos limites de integração.

Exemplo 6.15.

(i) Determinemos $\int \cos(\ln x)/x\, dx$. Ponhamos $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \ln x$. Então vale

$$\int \cos(\ln x)/x = \int f(u) du = \sin(\ln(x)) \quad \text{com } u = g(x).$$

Proposição 6.16. *Em geral, usamos o seguinte esquema:*

(i) *Regras de substituição*

$$u = g(x), \quad \Longrightarrow du/dx = g'(x), \Longrightarrow \quad dx = du/g'(x).$$

(ii) *Substituição de $dx = du/g'(x)$ na integral determinada $\int f(x)\, dx$. Ora, esperamos ter escolhido $g(x)$ tão manhosamente que a integral dependa somente de u, isto é,*

$$\int f(x)\, dx = \int \phi(u) du \quad \textit{para uma função } \phi(u).$$

(iii) *Ora, esperamos encontrar uma função primitiva $\Phi(u)$ com $\Phi'(u) = \phi(u)$.*

(iv) *Neste caso $\Phi(g(x))$ é uma função primitiva de $f(x)$.*

Demonstração: Justificamos brevemente: Ao substituirmos $f(x) = \tilde{f}(g(x))$ na integral, vale

$$\int f(x)\, dx = \int \tilde{f}(g(x))\, dx.$$

Para aplicar a regra de substituição, estendamos artificialmente, isto é,

$$\int \tilde{f}(g(x))\, dx = \int \tilde{f}(g(x))g'(x)/g'(x)\, dx.$$

Esperamos então que a função $\tilde{\phi}(x) := \tilde{f}(g(x))/g'(x)$ pode ser escrito como composição com $g(x)$, isto é,

$$\tilde{f}(g(x))/g'(x) = \tilde{\phi}(x) = \phi(g(x)) \quad \text{para uma função } \phi(u).$$

Pela regra de substituição,

$$\int f(x)\, dx = \int \phi(g(x))g'(x) = \int \phi(u) du \quad \text{com } u = \phi(x).$$

∎

Exemplo 6.17. Olhemos $f(x) = \cos x^2 \cdot x$, vide [P, Exemplo: 8.1.1]. Temos

$$u = x^2, \quad \Longrightarrow \; du/dx = 2x, \quad \Longrightarrow \; dx = du/2x.$$

Substituição de $dx = du/2x$ dá

$$\int x \cdot \cos x^2 \, dx = \int x \cdot \cos u \cdot du/2x.$$

Aqui x desvanece, isto é,

$$\int x \cdot \cos u du/2x = \int \cos u du/2 = 1/2 \sin u + \mathrm{C}.$$

Ponhamos $u = g(x)$ e obtemos finalmente $1/2 \sin x^2 + \mathrm{C}$.

Nota 6.18. Neste caso vemos diretamente, que, se pomos $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2$ então pela regra de substituição vale

$$\int \cos x^2 \cdot x \, dx = 1/2 \int f(x) g'(x) \, dx = 1/2 \int f(u) du \quad \text{com } u = g(x);$$

Então, novamente,

$$\int \cos x^2 \cdot x \, dx = 1/2 \sin(x^2).$$

Exemplo 6.19. Olhemos o exemplo $\int \frac{6x^2}{(1-4x^3)^3} \, dx$. Esperamos que $u = g(x) = 1 - 4x^3$ funciona, e de fato: Pelo esquema acima, vide [P, V.8.1.2 Exemplos (1)]. Porém, é claro desde o início que $g(x)' = 12x^2 = 2 \cdot 6x^2$; por isso

$$\int \frac{6x^2}{(1-4x^3)^3} \, dx = 2 \cdot \int f(g(x)) g'(x) \, dx = 2 \cdot \int f(u) du \quad \text{com } f(x) = 1/x^3.$$

Frações Parciais. Queremos calcular a função primitiva das funções racionais $g(x) = p(x)/q(x)$ por polinómios $p(x)$ e $q(x)$. Por divisão polinomial obtemos sempre polinômios $s(x)$ e $r(x)$ tal que

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \quad \text{com } \deg r < \deg q.$$

Logo $p(x)/q(x) = s(x) + r(x)/q(x)$; para o exemplo $g(x) = (2x^3 - 14x^2 + 14x + 30)/(x^2 - 4)$ vide [P, V.8.3]. Sabemos como integrar $s(x)$. Para a função racional $f(x) = r(x)/q(x)$ com $\deg r < \deg q$ podemos aplicar o seguinte método geral, vide [P, V.8.3.1]:

(i) Determinemos os zero do denominador (que suponhamos todos reais).

(ii) Associemos a todo zero x_i com multiplicidade n a fração parcial

$$P(x_0) = A_1/(x - x_i)^1 + A_2/(x - x_i)^2 + \cdots + A_n/(x - x_i)^n$$

com constantes desconhecidas A_1, A_2, ..., A_n.

(iii) Escrevamos

$$r(x)/q(x) = P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_m) \quad \text{com os zeros } x_1, \ldots, x_m. \quad (*)$$

(iv) Transformemos todas as frações em (*) de tal modo que tenham o mesmo denominador.

(v) Resolvamos o sistema de equações lineares em $d = \deg q$ variáveis $A_1(x_i)$, ..., $A_n(x_i)$ para $i = 1, \ldots, m$ obtido por comparação de coeficientes.

Nota 6.20.

(i) Um conselho para adivinhar os zeros do polinómio $p(x) = x^n + \cdots + a_0$: Imagine-se que o autor do problema quer encontrar um polinômio que compõe totalmente em n zeros reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Isto é, $p(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$. Além disso, escolhe todos os zeros racionais (para mitigar o esforço computacional). Então vale: Se todos os coeficientes $a_n, \ldots, a_n$ são inteiros, então igualmente os zeros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Como $a_0 = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ é o produto desses, concluímos: *Todos os zeros são inteiros e dividem o coeficiente constante a_0*!

(ii) Pela avaliação em valores apropriados como os zeros do denominador $x_1, \ldots, x_m$ e 0, as soluções dos $A_1(x_i)$, ..., $A_n(x_i)$ com $i = 1, \ldots, m$ podem ser facilmente obtidos.

(iii) As parcelas adicionais $A_2/(x - x_i)^2 + \cdots + A_n/(x - x_i)^n$ com zeros de maior multiplicidade são necessários para a resolubilidade do sistema de equações lineares.

Exemplo 6.21.

(i) Estamos, por exemplo, na situação seguinte: Queremos calcular

$$\int \frac{b_1 x + b_0}{x^2 + a_1 x + a_0}\, dx.$$

Não há função primitiva óbvia. O seguinte artifício ajuda: Adivinha os zeros α_1 e α_2 do polinômio $x^2 + a_1 x + a_0$; obtendo

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{x - \alpha_1} - \frac{z_2}{x - \alpha_2} &= \frac{z_1(x - \alpha_1) - z_2(x - \alpha_2)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)x - z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Obtemos as equações

$$z_1 - z_2 = b_1 \quad \text{e} \quad z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 = b_0 - \alpha_1\alpha_2,$$

um sistema de equações lineares em duas variáveis z_1 e z_2 que podemos resolver por substituição: $z_1 = z_2 + b_1$, logo

$$b_0 - \alpha_1\alpha_2 = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 = (z_2 + b_1)\alpha_1 + z_2\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)z_2 + b_1\alpha_1,$$

então $z_2 = \frac{b_0 - (\alpha_1 + b_1)\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$; calculemos $z_1 = \frac{b_0 - (\alpha_1 + b_1)\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + b_1$.

(ii) Queremos determinar $\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$. Como todos os coeficientes são inteiros e dividem o coeficiente constante $a_0 = 2$, adivinhemos -1 e 2 como zeros. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x - 2} &= \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{z_1}{x+1} + \frac{z_2}{x-2} \\ &= \frac{z_1(x-2) + z_2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(z_1 + z_2)x - 2 \cdot z_1 + z_2}{(x+1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Então vale

$$z_1 + z_2 = 0 \quad \text{e} \quad 2 \cdot z_1 + z_2 = 1.$$

Este sistema de equações lineares resolvemos, por exemplo, pela equação $z_2 = -z_1$.

(iii) Queremos determinar $\int f(x)\,dx$ com $f(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x}$. Divisão polinomial resulta em

$$x^3 - x^2 + x - 1 - x \cdot (x^2 + x) = 2x^2 - x + 1.$$

Calculemos

$$2x^2 - x + 1 - 2(x^2 + x) = -3x + 1.$$

Então

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x \cdot (x^2 + x) + 2(x^2 + x) - 3x + 1 = (x + 2)(x^2 + x) - 3x + 1.$$

Obtemos

$$f(x) = (x + 2) - \frac{3x + 1}{x^2 + x}.$$

Logo $\int f(x)\,dx = \int (x + 2)\,dx - \int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx$. Resta determinar a segunda integral por frações parciais. Como antes, adivinhamos os zeros -1 e 0, logo $x^2 + x = (x + 1)x$. Calculemos

$$\frac{3x + 1}{x^2 + x} = \frac{z_1}{x + 1} + \frac{z_2}{x} = \frac{z_1 x + z_2 x + z_2}{x(x + 1)}.$$

Obtemos o sistema de equações lineares

$$z_1 + z_2 = 3 \quad \text{e} \quad z_2 = 1.$$

Isto é, $z_2 = 1$ e $z_1 = 2$. Então

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + x}\,dx = \int \frac{1}{x + 1}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x + 1) + \ln(x) + C.$$

Concluímos que

$$\int f(x)\,dx = 1/2(x + 2)^2 + \ln(x + 1) + \ln(x) + C.$$

(iv) Um exemplo com um zero duplo:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

Vide [P, V.8.3.1. Exemplo: (2)].

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

(Potenzregel)

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh}|x| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{lll} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1 & & |x| < 1 \\ & \text{für} & \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2 & & |x| > 1 \end{array} \right\}$$

Figura 6.3.: Tabela de funções primitivas fundamentais

Exercício

(i) Determina as seguintes integrais pelas integrais fundamentais [P, V.5, Tabelle 1], vide Figura 6.3.

(a) $\int x^2 + 2x + 1/x \, dx$

(b) $\int \frac{x-2}{x^3} \, dx$

(c) $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$

(d) $\int (\sqrt{x} - 1)^3 / x \, dx$

(e) $\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)} \, dx$

(f) $\int (\sin x - \cos x + \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{7}{\sin^2 x}) \, dx$

(g) $\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$

(h) $\int \tan^2 x \, dx$

(ii) Determina as seguintes integrais por integração parcial:

(a) $\int x \ln x \, dx$

(b) $\int x \cos x \, dx$

(c) $\int x^2 e^2 x \, dx$

(d) $\int (\ln x)^2 \, dx$

(iii) Determina as seguintes integrais por substituição:

(a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(b) $\int e^{\cos x} \sin x \, dx$

(c) $\int e^{\sqrt{x}} / \sqrt{x} \, dx$

(d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} \, dx$

(e) $\int \frac{\cos \ln x}{x} \, dx$

(f) $\int \frac{1}{\sin(4x-2)} \, dx$

(iv) Determina as seguintes integrais por aplicação de seja integração parcial, seja a regra de substituição:

(a) $\int \arctan x \, dx$

(b) $\int (2x - 3) \cos(5x + 1) \, dx$

(c) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{7x-5}} \, dx$

(d) $\int \frac{3x-1}{\cos^2(5x+6)} \, dx$

(e) $\int (\frac{2}{3}x - 5) e^{4-3x} \, dx$

(v) Calcula as seguintes integrais por frações parciais:

(a) $\int \frac{5x^3+9x^2-22-8}{x^3-4x}\,dx$

(b) $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12}\,dx$

(c) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$

(vi) Quando um gás expande reversivelmente, o trabalho que exerce à sua circunvizinhança é dado por

$$w = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

onde V_1 é o volume inicial, V_2 é o volume final e P é a pressão do gás. A equação de van der Waals descreve a dependência de P e V por

$$(P + \frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$

onde

- a é uma constante de coesão;
- b é uma constante de covolume molar;
- n é a quantidade de matéria em mols;
- P é a pressão;
- R = 8,3145J/Kmol é a constante universal de gases perfeitos;
- T é a temperatura;
- V é o volume.

(a) Dá uma fórmula para o trabalho se 1000 mols de um gás expande reversivelmente de um volume V_1 a um volume V_2!

(b) Se T = 298.15K, V_1 = 1 litro, V_2 = 100 litros, calcula o trabalho para 1000 mols de CO_2 que tem $a = 0{,}364\,\mathrm{Pa\,m^6\,mol^{-2}}$ e $b = 4{,}26710^{-5}\mathrm{mol}^{-1}$.

Soluções

(i)

(a) $x^3/3 + x^2 + \ln|x| + C$

(b) $2/3x\sqrt{x} + 3/4x\sqrt[3]{x} + C$

(c) $2/3x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$

(d) $2/3x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x|$

(e) $3/2\arctan x - 1/2\operatorname{arsinh} x + C$

(f) $-\cos x - \sin x + 2\tan x + 7\cot x + C$

(g) $1/3x^3 - x + \arctan x + C$

(h) $\tan x - x + C$, escreve $\tan^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$.

(ii)

(a) $x^2/2\ln x - x^2/4 + C$

(b) $x\sin x + \cos x + C$

(c) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

(d) $x[(\ln x - 1)^2 + 1] + C$

(iii)

(a) $1/4\sin^4 x + C$

(b) $-e^{\cos x} + C$

(c) $2e^{\sqrt{x}} + C$

(d) $-\sqrt{1 + 2\cos x} + C$

(e) $\sin\ln x + C$

(f) $1/4\ln|\tan(2x - 1)| + C$

(iv)

(a) $x\arctan x - 1/2\ln(1+x^2) + C$, faça primeiro integração parcial com $f' = 1, g = \arctan x$.

(b) $\frac{2x-3}{5}\sin(5x+1) + 2/25\cos(5x+1) + C$, faça primeiro integração parcial.

(c) $2/49\sqrt{7x-5}\cdot(7x+24) + C$, faça primeiro integração parcial.

(d) $(43/27 - 2/9x)e^{4-3x} + C$

(v)

(a) $5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C$

(b) $4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C$

(c) $2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

(vi)

(a) Obtemos $P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2a}{V^2}$ e $w = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = nRT\ln(\frac{V_2-nb}{V_1-nb}) + n^2a(1/V_2 - 1/V_1)$.

(b) Obtemos $w = 11163$J.

7. Calcular Áreas por integrais

Neste capítulo calcularemos integrais sobre intervalos em que um dos seus limites não pertence mais ao domínio da função; por exemplo, $[a, b[$ para $b = \infty$ ou b um polo como 0 para $f(x) = 1/|\sqrt[2]{x}|$.

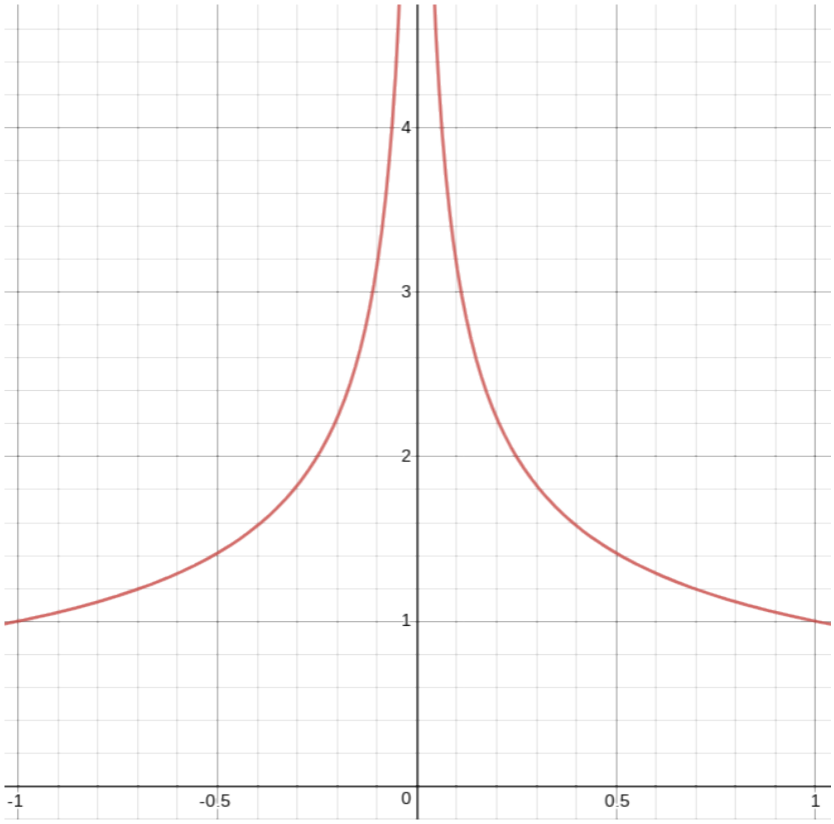


Figura 7.1.: O gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ no intervalo $[-1, 1]$

Recordemo-nos do Teorema Fundamental:

Proposição. *Seja* F *uma função primitiva da função contínua em pedaços f definida* *sobre* $[a,b]$. *Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

7.1. Computação da Área

A interpretação de $\int_a^b f(x)\,dx$ como área faz somente sentido, se $f(x) \geq 0$ para todos os $x \in [a,b]$. Se, $f(x) < 0$, então o sinal da integral é negativo como mostra Figura 7.2.

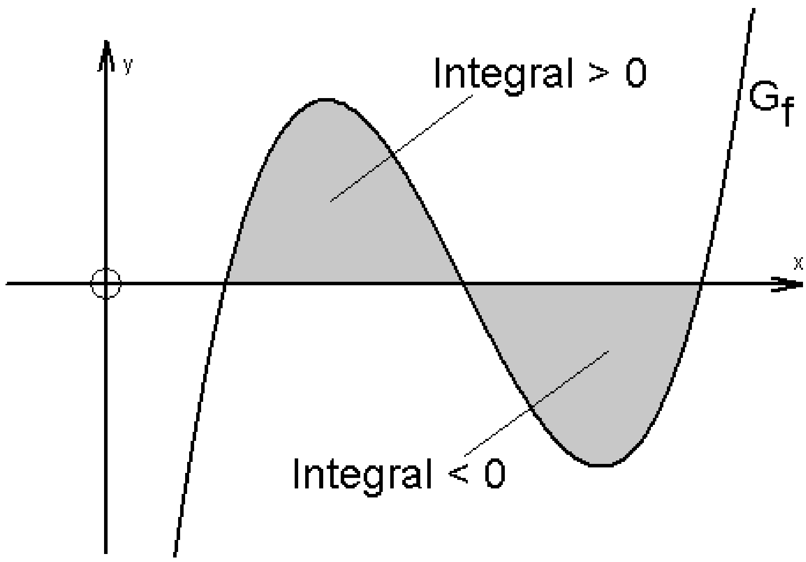


Figura 7.2.: O sinal da integral muda quando a curva travessa o eixo-x

Se $f(x) \leq 0$, então a integral do espelhamento $-f$ de f em torno do eixo-x, a integral $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ descreve esta área.

Definição 7.1. Na computação da área A entre uma curva $f(x)$ e o eixo-x no intervalo $[a,b]$ é dada pela integral de $|f(x)|$, isto é,

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Nota 7.2. Logo, para calcular A temos que distinguir:

(i) Se $f(x) \geq 0$ (isto é, a curva é acima do eixo-x), então $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) Se $f(x) \leq 0$ (abaixo do eixo-x), então $\mathrm{A} = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (isto é, temos de espelhá-la).

(iii) Se em parte $f(x) \leq 0$, em parte $f(x) \geq 0$, então decompomos $[a,b]$ em intervalos $[t_0,t_1],\ldots,[t_{n-1},t_n]$, tal que quer $f(x) \geq 0$, quer $f(x) \leq 0$ em $[t_i,t_{i+1}]$ para $i = 0,\ldots,n-1$. Ponhamos então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{A}([t_0,t_1]) + \cdots + \mathrm{A}([t_{n-1},t_n]),$$

onde $\mathrm{A}([t_i,t_{i+1}]$ denote a área no intervalo $[t_i,t_{i+1}]$ — a qual sabemos determinar pelos primeiros dois casos.

Isto é, dividamos o eixo-x pelos sinais da função como em Figura 7.3.

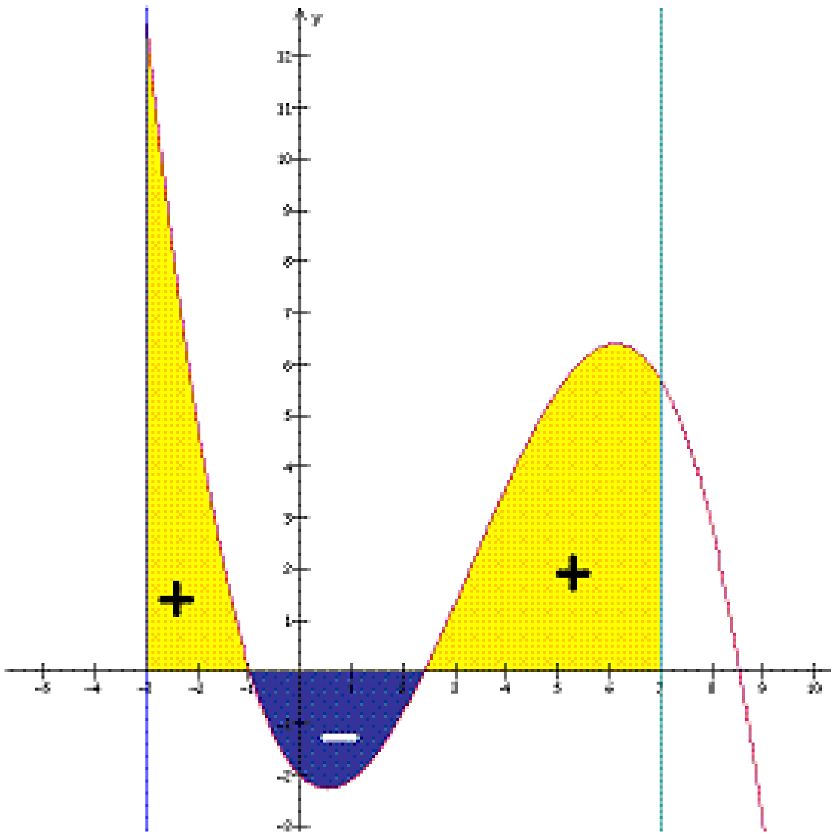


Figura 7.3.: As partes abaixo e acima do de $y = 0$ precisam de ser separadas para calcular a área

Se o terceiro caso ocorre, então temos que determinar os zeros $t_1, \ldots, t_{n-1}$ de f (no intervalo $[a,b]$ para garantir, quer $f(x) \leq 0$, quer $f(x) \geq 0$ para x entre dois zeros consecutivos t_i e t_{i+1}.

Exemplo 7.3. Determinemos a área de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ no intervalo $[-2\frac{1}{2}, 3]$ em dois passos:

(i) Adivinhar os zeros, e

(ii) Testar, se $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$ para x entre dois zeros; vide [P, exemplo 10.2.1].

7.2. A área entre duas curvas

Queremos determinar a área A entre duas curvas dadas por funções $f \geq g \geq 0$ no intervalo $[a,b]$ (Desenho!). É a diferença entre as áreas em baixo da curva de cada função, isto é,

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f - g(x)\, dx.$$

Definição 7.4. A área A entre duas curvas das funções $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a,b]$ é dada pela área da curva da função $h(x) = f(x) - g(x)$ no intervalo $[a,b]$; isto é, $A = \int_a^b |h(x)|\, dx$.

Nota 7.5. Temos de determinar os zeros $t_1, \ldots, t_{n-1}$ de h (no intervalo $[a,b]$ para garantir, quer $h(x) \leq 0$, quer $h(x) \geq 0$ para x entre dois zeros consecutivos t_i e t_{i+1}.

Exemplo 7.6. Queremos determinar a área entre as curvas das funções $f(x) = -1/2x^2 + 6$ e $g(x) = 3/2x + 2$ em que a curva de $f(x)$ é acima da de $g(x)$.

(i) Adivinhamos os zeros $x = -4{,}7$ e $x = 1{,}7$ de $h(x) = f(x) - g(x)$, e

(ii) calculamos $A = \int_{-4,7}^{1,7} h(x)$.

Vide [P, V. 10.2.2 exemplos (1)].

7.3. Integração sobre um intervalo infinito

Exemplo 7.7. Para calcular $\int_1^\infty 1/x^3\,dx$:

(i) Calcula $I(\lambda)$, e

(ii) Calcula $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = 1/2$.

Vide [P, V.9.1. exemplos (1)].

Definição 7.8. Para calcular $\int_a^\infty f(x)\,dx$:

(i) Calcula para $a \leq \lambda < \infty$

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,dx.$$

(ii) Calcula, caso existente,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\,dx.$$

Caso este limite exista, a integral é chamada de *convergente*, caso contrário *divergente*. Analogamente,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to\infty} \int_\lambda^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^\lambda f(x)\,dx.$$

Exemplo 7.9.

(i) Determina a área entre a curva $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e o eixo-x; vide [P, V.8.1, exemplo (2)].

(ii) A integral imprópria $\int_0^\infty \sqrt{x}\,dx$ não existe, porque a área cresce sem limite; vide [P, V.9.1. exemplo (3)].

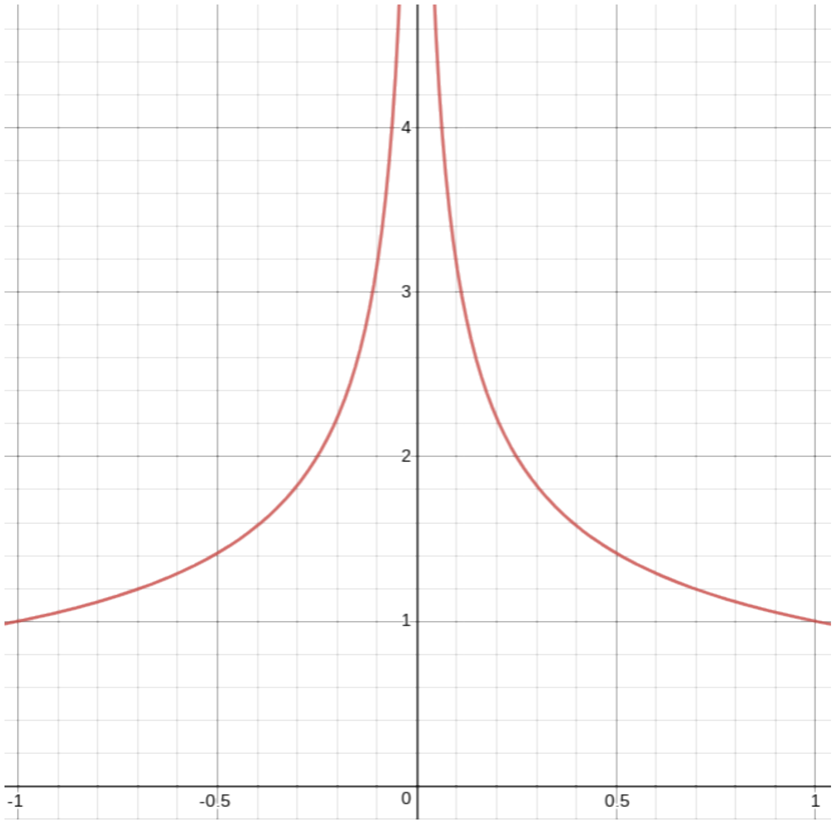


Figura 7.4.: O gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ no intervalo $[-1, 1]$

7.4. Integração sobre polos

Isto é, integramos sobre intervalos semiabertos. Queremos, por exemplo, calcular a área entre a curva de $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ e o eixo-x no intervalo $[-1,1]$ como desenhado em Figura 7.4.

Como $f(x)$ para $x = 0$ não é definido, temos de aproximar a integral em volta de 0 e calcular o limite.

Definição 7.10. Se a função $f(x)$ tem um polo $x = b$, então a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é calculada,

(i) aproximadamente para $a \leq b - \varepsilon < b$ pela integral

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

(ii) exatamente, caso existente, pelo limite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Caso este limite exista, então a integral é dita *convergente*, caso contrário *divergente*. Analogamente, se $x = a$ é um polo, então

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Se c é um polo em $[a,b]$ entre os pontos finais a e b, então ponhamos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Exemplo 7.11.

(i) Determinemos $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$; vide [P, V.9.2. exemplo (1)].

(ii) Determinemos $\int_{-1}^1 1/\sqrt[3]{x}\,dx$.

Exercício

(i) Determina as seguintes integrais:

(a) $\int_1^3 x^3\,dx$
(b) $\int_1^2 (x^2+1/x^4)\,dx$
(c) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$
(d) $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$
(e) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}\,dx$
(f) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$
(g) $\int_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}\,dx$
(h) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$
(i) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

(ii) Determina as seguintes integrais:

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$
(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$
(c) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$
(d) $\int_0^\infty x^2e^{-x/2}\,dx$
(e) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(iii) Determina as seguintes integrais impróprias com polos no intervalo:

(a) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$
(b) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$
(c) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
(d) $\int_{0,5}^2 \frac{dx}{x\ln x}$

(iv) Determina a área cercada pelas seguintes (pares de) curvas (que deveriam ser esboçadas):

(a) $y=4-x^2$ e $y=0$
(b) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$
(c) $y=x^3$ e $y=8$
(d) Um meio período (isto é, a crista da onda) de $y=\sin x$ e $y=0$.
(e) $y=x^2$ e $y=2-x^2$

(v)

Nota. Dada uma função $y = f(x)$, o comprimento da sua curva s entre a e b calcula-se pela fórmula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

A posição $(x(t), y(t))$ de um carro no plano em função do tempo t seja descrito pela curva $(x(t), y(t))$ com $x(t) = 7t^2$ e $y(t) = \sqrt{t^3}$. Com quantos quilómetros por hora anda o carro após t segundos? Por exemplo, após $t = 2$ segundos?

Soluções

(i)
- (a) 20
- (b) $2\frac{5}{8}$
- (c) $\frac{\pi}{12a}$
- (d) $\frac{1}{2}$
- (e) $2(1 + \ln 2)$
- (f) $1/3$
- (g) $\frac{\pi a^2}{16}$
- (h) $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$
- (i) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}$

(ii)
- (a) 1
- (b) ∞, divergente
- (c) $1/2$
- (d) 16
- (e) $\pi/6$

(iii)
- (a) $6\sqrt[3]{2}$
- (b) divergente
- (c) $1/\ln 2$
- (d) 0

(iv)
- (a) $32/3$
- (b) πab
- (c) 12
- (d) 2
- (e) $8/3$

8. Funções de múltiplas variáveis

Até agora: estudamos funções $f(x)$ de uma única variável. Por exemplo, uma função $s(t)$ que descreve o caminho percorrido (por um carro) em dependência do tempo t .

A partir de agora: Consideraremos funções $f(x_1,...,x_d)$ de múltiplas variáveis. Por exemplo, a dependência da temperatura $\mathrm{T}(x,y,z)$ da posição no espaço tridimensional (x,y,z).

Como desenhar pontos no espaço com três dimensões? Para reparar o ponto com coordenadas cartesianas (x,y,z) no sistema de coordenadas, orientemonos em Figura 8.1 e sigamos os seguintes passos:

(i) A partir da origem (0,0,0) do sistema de coordenadas, avança x unidades no eixo-x até o ponto $(x,0,0)$ (que se situa no eixo-x).

(ii) A partir dali, do ponto $(x,0,0)$, avança y unidades no eixo-y até o ponto $(x,y,0)$ (que se situa no plano-x,y).

(iii) A partir dali, do ponto $(x,y,0)$, avança z unidades no eixo-z até o ponto (x,y,z) (que se situa no espaço-x,y,z).

Por exemplo, as coordenadas dos pontos do cubo cujos lados tem comprimento de 3 unidades são dadas em Figura 8.2.

No espaço tridimensional, se fixamos uma das coordenadas x, y e z, então os pontos em que esta coordenada é 0 formam um plano. Este plano é chamado

- do *plano-x,y* (quando $z = 0$),
- do *plano-y,z* (quando $x = 0$), e
- do *plano-x,z* (quando $y = 0$).

Vê Figura 8.3 para os planos dos eixos no espaço tridimensional.

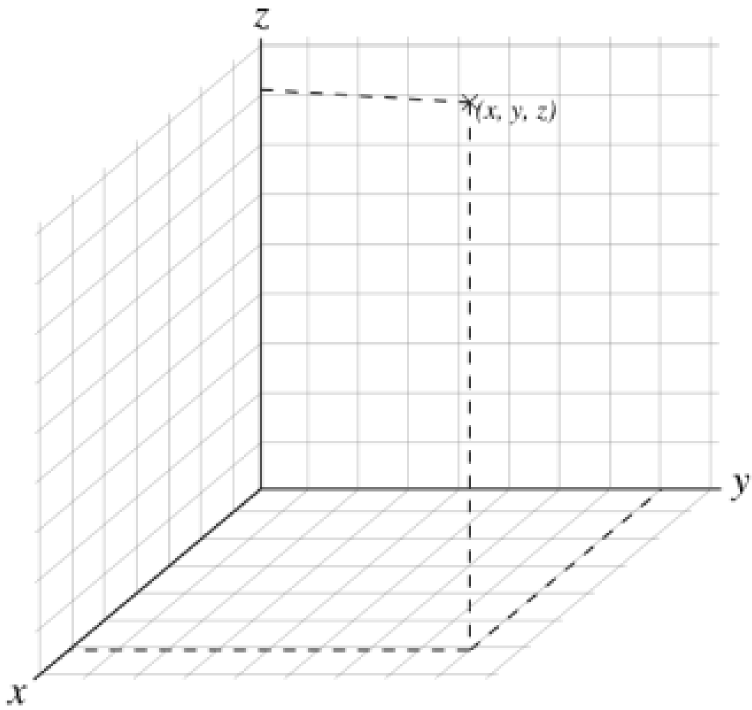


Figura 8.1.: Como reparar um ponto no espaço tridimensional.

8.1. Funções de duas variáveis

Dois é o número máximo de variáveis tal que o gráfico da função ainda pode ser visualizado, da seguinte maneira, análoga à de funções de uma variável: Para cada ponto (x,y) com coordenadas x e y no plano, desenha acima dele, na altura $z = f(x,y)$ um ponto no espaço.

Logo, começamos com uma função de duas variáveis. Para visualizar um gráfico de uma função de duas variáveis, um bom plotter online é `https://www.geogebra.org/3d`.

Escrevamos $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para uma função $f(x,y)$ de duas variáveis.

Exemplo 8.1.

(i) A carcaça do hemisfério fechado $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ sobre $D = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 1\}$.

(ii) A carcaça do hemisfério aberto $f(x,y) = \|(x,y)\|$ com $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ no domínio $D = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 1\}$. Esta função devolve para cada

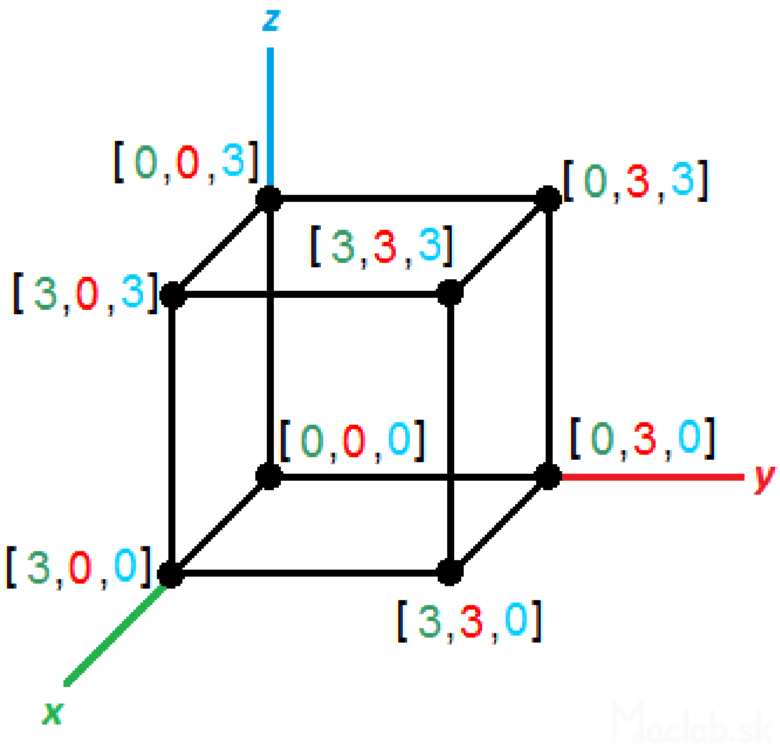


Figura 8.2.: As coordenadas dos ângulos de um cubo cujos lados têm comprimentos de três unidades

ponto (x,y) a sua distância à origem, isto é, o comprimento, ou norma, do vetor (x,y); o seu gráfico é desenhado em Figura 8.4.

Se imaginamos o gráfico de uma função de duas variáveis como uma serra, então

- o ponto do gráfico é a posição do alpinista,
- a sua posição no plano-x,y é a sua posição no mapa (bidimensional), e
- a sua coordenada z é a altura do alpinista.

Dado o mapa e uma altura α, quais são os pontos do mapa cuja altura é a mesma altura α?

Definição 8.2. A *curva de nível* de uma função $f\colon \mathrm{R}^2 \to \mathbb{R}$ ao nível α é o conjunto de todos os pontos (x,y) com $f(x,y) = \alpha$.

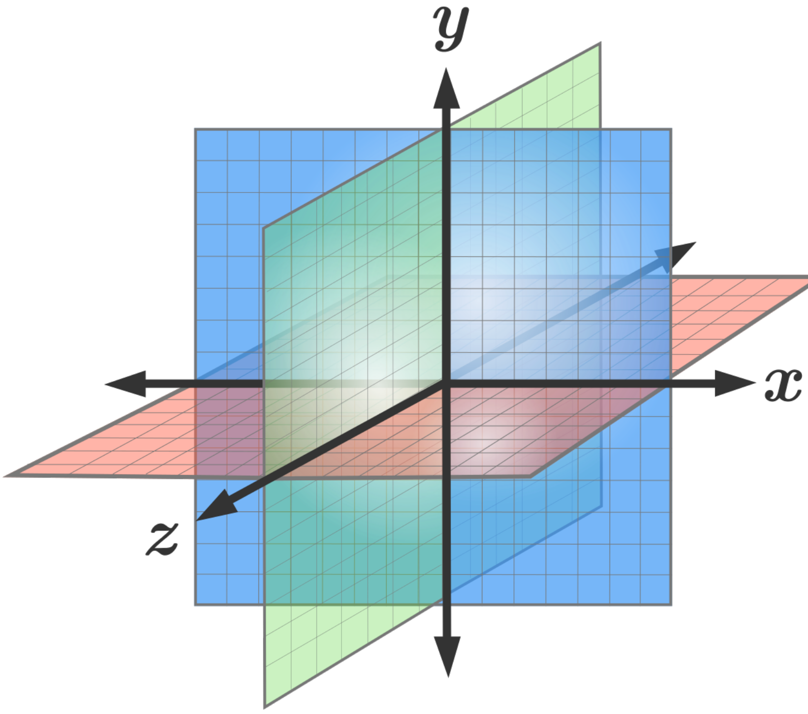


Figura 8.3.: Os três planos x,y, y,z e x,z no espaço tridimensional.

Nota 8.3.

(i) *Curva de Nível*, porque $f(x,y)$ tem nela a altura α acima do plano-x,y. (Visualiza por um plotter!).

(ii) No exemplo $f(x,y) = \|(x,y)\|$, a curva de nível $\mathrm{H}(r)$ à altura r é

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{com } \|(x,y)\| = r\} \\ &= \{ \text{ vetores do plano-}x,y \text{ de comprimento } r\}. \end{aligned}$$

Isto é, é um círculo de raio r.

8.2. Continuidade em várias variáveis

Explicamos o que é uma função *contínua* $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ de múltiplos argumentos. Recordemo-nos da seguinte definição de continuidade:

Definição. A função $f(x)$ é *contínua* no ponto de abcissa x_0, se para toda (arbitrariamente pequena) distância $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $|x - x_0| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

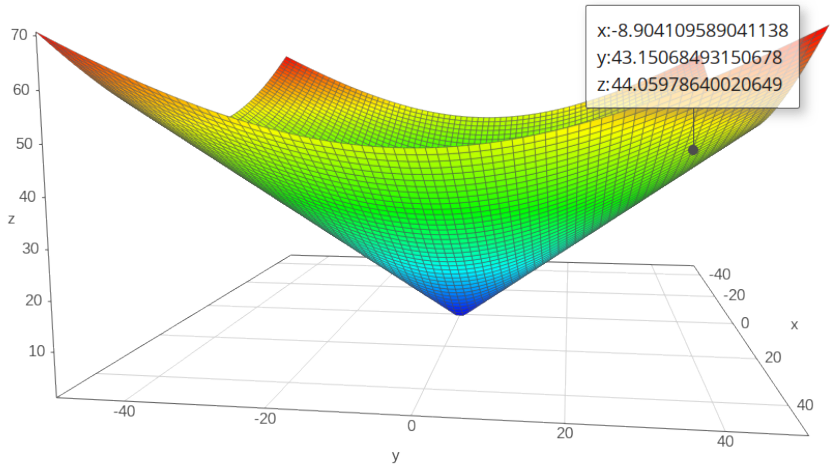


Figura 8.4.: O gráfico da função $f(x,y) = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ que devolve para cada ponto a sua distância à origem.

.

Isto é, a distância entre os valores $f(x)$ e $f(x_0)$ é muito pequena, se a distância entre x e x_0 é suficientemente pequena. Queremos generalizar a noção de *distância* de uma variável a múltiplas variáveis.

Em uma dimensão, a distância entre dois pontos de abcissa $x,y \in \mathbb{R}$ é dada pelo valor absoluto, ou módulo, $|x-y|$, isto é, o comprimento de $a := x - y \in \mathbb{R}$. Em dimensões maiores:

Definição. O *comprimento* de $a \in \mathbb{R}^n$ é dado por $\|a\| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_d^2}$ (pelo Teorema de Pitágoras). A *distância* entre x e y em $\mathbb{R}^d$ é dada por $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$.

Em uma dimensão olhamos frequentemente vizinhanças

$$B_{<\varepsilon}(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\};$$

isto é, intervalo aberto em torno do ponto de abcissa x_0 de comprimento 2ϵ. (Desenha!) Em duas dimensões,

$$B_{<\varepsilon}(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

é um disco aberto em torno de x_0 de raio ε. (Desenha!) Em três dimensões, é uma bola aberta. (Desenha!)

Definição 8.4. A função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ é *contínua* no ponto de abcissa x_0, se para toda (arbitrariamente pequena) distância $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $\|x - x_0\| \leq \delta$ implique $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$.

Nota 8.5. Visualizemos a continuidade pelo exemplo da função cujo gráfico é a caraça do hemisfério fechado, $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, em torno do ponto de abcissa $x_0 = 0$. A função é contínua em $x_0 = 0$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um disco $\mathrm{D} = \mathrm{B}_{<\varepsilon}(1)$ em torno de 0, tal que a distância entre as alturas e de $f(0) = 1$ é menor que ε.

8.3. Funções parciais e derivação em múltiplas variáveis

Exemplo 8.6. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Podemos fixar $y = y_0$, tal que $f(x,y_0)$ se torne uma função de uma única variável x. Por exemplo, $y = y_0 = 1$, e $p_1(x)f(x,y) = f(x,1) = x^2 + 1$ depende somente de x. A função $p_1(x)$ é a primeira *função parcial* de f em $y = 1$.

Definição 8.7. Seja $f(x_1,\ldots,x_d)$ uma função de múltiplas variáveis. A primeira *função parcial* com argumentos fixos $(x_2,\ldots,x_d) = (c_2,\ldots,c_d)$ é dada por $p_1(x) := (x,c_2,\ldots,c_d)$. Analogamente para a segunda, terceira, ..., e d-ésima função parcial.

Exemplo 8.8. Podemos derivar as funções parciais como de costume: Seja, por exemplo, $p_1(x) = f(x,y)$ a primeira função parcial de $f(x,y) = yx^2 + y^2$. Se consideramos y como *constante*, então $p_1'(x,y) = y \cdot 2x + 0 = 2y \cdot x$. Escrevamos $p_1' = \frac{\partial f}{\partial x}$, porque derivamos na coordenada-x. Além disto, temos $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$.

Definição 8.9. Seja $f(x_1,\ldots,x_d)$ uma função de múltiplas variáveis. A *primeira derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = p_1'(x_1) := (x_1,x_2,\ldots,x_d).$$

Analogamente para a segunda, terceira, ..., e d-ésima derivada parcial.

Geometricamente, para uma função $f(x,y)$ a sua primeira derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ no ponto (x_0,y_0) é a inclinação do gráfico no ponto (x_0,y_0) na direção do eixo-x. (Desenha!)

Em Figura 8.5, vemos como interpretar a derivada parcial geometricamente como reta tangente ao gráfico da função em direção de um eixo de coordenada, por exemplo, do eixo-x.

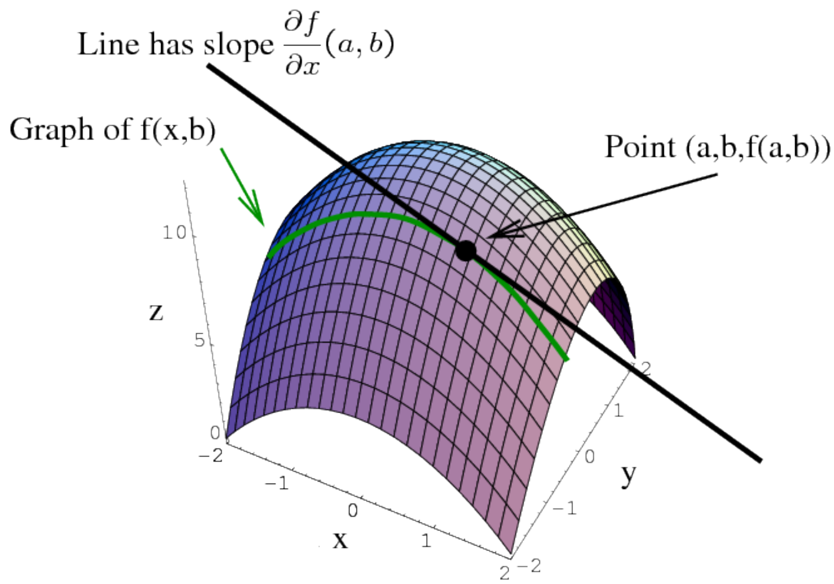


Figura 8.5.: A derivada parcial como reta tangente na direção de um eixo

Destacamos mais uma vez, que os argumentos restantes $x_2, \ldots, x_d$ da primeira função parcial são todos considerados como *constantes.* Por exemplo, para $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot e^{x_2} + \arctan x_2$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \cdot e^{x_2} + 0 = 2e^{x_2} x_1.$$

Definição 8.10. O gradiente $\operatorname{grad} f$ de uma função $f(x_1, \ldots, x_d)$ é definido por

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0)\right).$$

É sempre denotado como vetor reta (e não coluna).

Pelo gradiente, podemos calcular as derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t}$$

em todas as direções $h \in \mathbb{R}^d$ (enquanto, até agora, unicamente, nas dos eixos-$x_1, \ldots, x_d$):

Proposição 8.11. *A derivada* $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ *da função* f *em direção* h *para* $h \in \mathbb{R}^d$ *é dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot h^T. := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)h_d.$$

Nota 8.12.

(i) O produto

$$x \cdot y^{\mathrm{T}} := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$$

é o *produto escalar* entre os vetores x e y. Tem-se

$$x \cdot y^{\mathrm{T}} = \|x\| \|y\| \cos \alpha$$

onde α é o ângulo entre x e y.

(ii) Pois $\cos \alpha$ é máximo (com valor 1) para $\alpha = 0$, isto é, quando x e y são na mesma reta, então$x \cdot y$ é entre todos os vetores do mesmo comprimento máximo quando x e y são múltiplos um do outro. Em particular, a derivada em x_0 é máxima, se derivamos em direção de $\operatorname{grad} f(x_0)$; geometricamente: O vetor gradiente indica a direção da máxima inclinação e o seu comprimento mede esta inclinação! Vê Figura 8.6 para uma visualização do gradiente (no ponto A da função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$).

Exemplo 8.13. Deriva a função $f(x,y,z) = z^2 \cdot e^{-xy}$ em $x_0 = (-1,1,3)$ na direção de $h = (-2,1,2)$.

Podemos iterar a derivação parcial às derivadas parciais (do primeiro grau): Toda derivada parcial $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_d$ é outra vez uma função de d variáveis $(x_1, \ldots, x_d)$. A derivada de $\partial f/\partial x_i$ na direção de x_j é denotada

$$\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \frac{\partial(\partial f/\partial x_i)}{\partial x_j}.$$

Por exemplo, para duas coordenadas x e y, temos quatro derivadas parciais de segundo grau:

$$\partial^2 f/\partial x \partial y, \partial^2 f/\partial y \partial x, \partial^2 f/\partial x \partial x, \text{ e } \partial^2 f/\partial y \partial y.$$

Analogamente para derivadas de graus maiores.

Exemplo. Seja $f(x,y) = x^2 \ln y$. Tem-se

- $\partial f/\partial x = 2x \ln y$ e $\partial f/\partial y = x^2/y$, e
- $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x = 2x/y$, $\partial^2 f/\partial y \partial y = -x^2/y^2$ e $\partial^2 f/\partial x \partial x = 2 \ln y$.

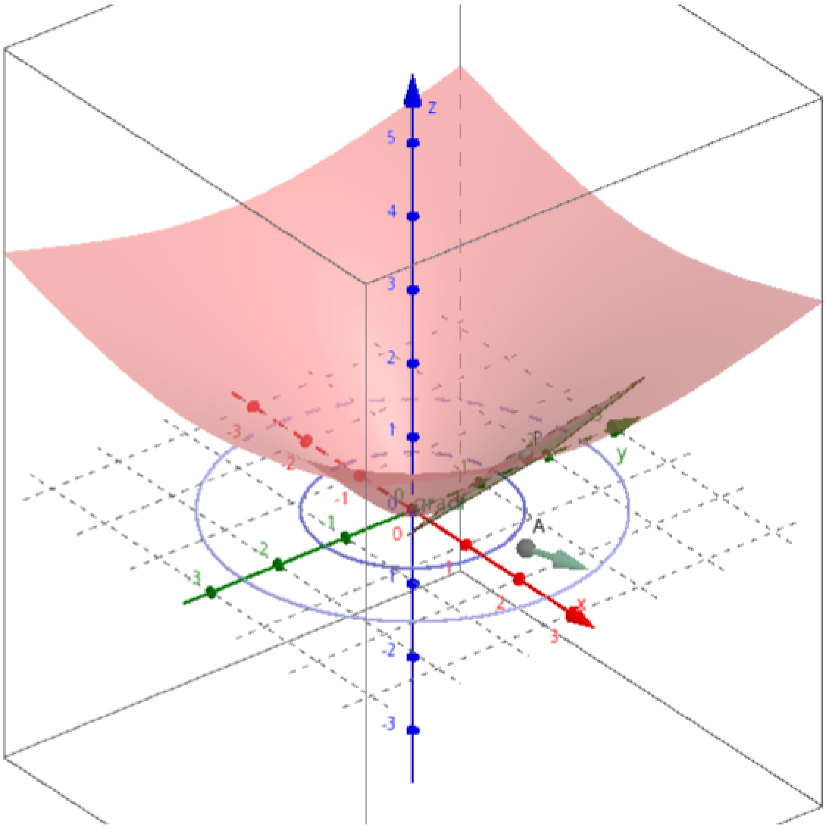


Figura 8.6.: O gradiente (= a flecha verde) indica a direção do máximo declive no ponto A

8.4. Encontrar Extremos (locais)

Em várias dimensões, a derivação tem de ser definida diferente da em uma dimensão, isto é, de $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; já que não podemos dividir por um vetor h.

Teorema 8.14. *Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função de múltiplas variáveis. Então é f diferençável, se todos as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$ existem e são* contínuas.

Como no caso de uma dimensão, é geometricamente claro que a inclinação em um extremo é zero. Por isso, vale:

Proposição 8.15. *Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função de múltiplas variáveis. Se x_0 é um extremo (local) de f, então todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$ são zeros, isto* *é,*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0.$$

Isto é, $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ é um critério ***necessário*** para x_0 ser um extremo.

Nota 8.16.

(i) Como mencionado acima, o vetor $\operatorname{grad} f(x_0)$ indica a direção da maior inclinação no ponto de abcissa x_0 e a qual é medida pelo seu comprimento. Por isso, vale

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0$$

se, e tão-somente se, as inclinações em todas as direções são zero.

(ii) Um critério suficiente para x_0 ser um extremo em duas dimensões é

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right)_{i,j=1,2} > 0$$

onde

- a 2×2-matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \right)_{i,j=1,2}$ é dada
  - na coluna esquerda pelas derivadas $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ na direção do eixo-x das funções $h = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, e
  - na coluna direita pelas derivadas $\frac{\partial h(x)}{\partial y}$ na direção do eixo-y das funções $h = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
- A determinante de uma 2×2-matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é dada por $ad - bc$, e, em geral, para matrizes quadráticas em mais entradas, é definida na álgebra linear.

Exercício

(i) Calcula as derivadas parciais de primeiro grau das funções

(a) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - y^3$

(b) $g(x,t) = \ln(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}})$

(c) $f(x,y) = xe^{-yx}$

(d) $f(x,y) = \frac{x}{3y-2x}$

(e) $h(x,t) = \ln \sin(x - 2t)$

(ii) Calcula as derivadas parciais de segundo grau das funções

(a) $z(x,y) = \ln(y - x^2)$

(b) $w(u,v) = \arctan \frac{u+v}{1-uv}$

(c) Calcula a derivada parcial de terceiro grau de $z(x,y) = x^3 + x^2y + y^3$

(iii) Dada a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Calcula $\operatorname{grad} f$ em geral, e no ponto $(3,4)$.

(b) Desenha a curva de nível em torno do ponto $(3,4)$ e o seu gradiente.

(iv) Calcula a derivada da função $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ no ponto $P := (1,2)$ na direção que leva de P a $Q := (4,6)$.

(v) Calcula $\operatorname{grad} u$ no ponto $P = (1,2,3)$ para $u = f(x,y,z) = xyz$.

(vi) Seja $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ e $P = (1,1)$. Em qual direção a inclinação do gráfico de f é máxima em P? Qual é a inclinação nesta direção?

Soluções

Para uma função f e uma coordenada x, denotemos em seguida de maneira mais sucinta $f_x := \partial f / \partial x$; analogamente, para outras coordenadas y e z, denotemos $f_{xy} := \partial^2 f / \partial x \partial y$ e $f_{xyz} := \partial^3 f / \partial x \partial y \partial z$.

(i)

(a) $f_x = 3x(x+2), f_y = 3(x^2 - y^2)$.

(b) $g_x = \frac{\sqrt[3]{t}}{3x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{t})}$, $g_y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3t(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x})}$

(c) $f_x = e^{-xy}(1 - xy), f_y = -x^2 e^{-xy}$

(d) $f_x = \frac{3y}{(3y-2x)^2}, f_y = \frac{-3x}{(3y-2x)^2}$

(e) $h_x = \cot(x - 2t), h_t = -2\cot(x - 2t)$

(ii)

(a) $z_{xx} = \frac{2(y+x^2)}{(y-x^2)^2}, z_{xy} = \frac{2x}{(y-x^2)^2}, z_{yy} = \frac{1}{(y-x^2)^2}$

(b) $w_{uu} = \frac{-2u}{(1+u^2)^2}, w_{uv} = 0, w_{vv} = \frac{-2v}{(1+v^2)^2}$

(c) $z_{xxx} = 6, z_{xxy} = 2, z_{xyy} = 0, z_{yyy} = 6$.

(iii)

(a) $\operatorname{grad} z = (2x, 2y), \operatorname{grad} z_{|(3,4)} = (6,8)$

(b) A curva de nível é o círculo em torno de $(0,0)$ com raio $r = 5$.

(iv) Tem-se $h := v(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (3,4)$ e $\frac{\partial z}{\partial h} = (-1,2)(3,4)^{\mathrm{T}} \cdot 1/5 = 1$.

(v) Tem-se $\operatorname{grad} u_{|(1,2,3)} = (6,3,2)$.

(vi) Tem-se $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x/(x^2 + y^2 + 1), 2y/(x^2 + y^2 + 1))$. Em $\mathrm{P} = (1,1)$, temos $\operatorname{grad} f(1,1) = (2/3, 2/3)$; isto é, a inclinação é máxima na direção da reta dada pelos pontos $\lambda(2/3, 2/3)$ para $\lambda > 0$ no plano x,y. A inclinação é dada por $\partial f/\partial h(x,y)$ para $h = (h_x, h_y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2/3, 2/3)$ e $(x,y) = (1,1)$ que calculamos pela fórmula

$$\partial f/\partial h(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) \cdot h = \partial f/\partial x(x,y)h_x + \partial f/\partial y(x,y)h_y$$

Substituindo h e (x,y), obtemos

$$\partial f/\partial h(x,y) = (2/3)^2 + (2/3)^2 = 8/9.$$

A. Retrospetiva

(i) Sequências, Limites e Séries:

(a) Determina as limites das seguintes sequências:

(1) $\frac{6n-3}{6-5n}$

(2) $\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$

(3) $(\frac{5n-2}{3n-1})^3$

(4) $\sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}$

(5) $\sqrt{n^2+n} - n$

(6) $(1+\frac{1}{2n})^n$

(7) $(1-\frac{5}{n})^{\frac{n}{4}+3}$

(8) $\frac{5n-313}{6-4n}$

(9) $(\frac{3n-8}{2n-1})^3$

(10) $(1+\frac{1}{2n})^{n+2}$

(11) $(a_n) = \frac{5n-313}{6-4n}$,

(12) $(a_n) = \frac{6n-3}{6-5n}$,

(13) $(a_n) = (\frac{3n-8}{2n-1})^3$,

(14) $(a_n) = (1+\frac{1}{2n})^{n+2}$,

(15) $(a_n) = \frac{n(n+3)-4}{n^2-1}$, e

(16) $(a_n) = \frac{n^4-2}{n^2+4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3+1}$.

Determina para cada sequência (a_n) com limite a um n_0 em $\mathbb{N}$ tal que $|a - a_n| < \epsilon$ para todos os n em $\mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

(b) Determina os seguintes limites.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1+\sin x}{2x^2}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x^2)}{2x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{4}$

(4) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5}$

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+1}$

Caso sejam $\pm\infty$, mostra isto por Definição 2.4; isto é, determina para cada limite F um x_0 em $\mathbb{R}$ tal que $|F - f(x)| < \epsilon$ para todos os x em $\mathbb{R}$ com $x \geq x_0$.

(c) Determina a convergência das seguintes séries pelos critérios do manuscrito:

(1) $1/2 + 3/4 + 5/6 + 7/8 + \cdots$

(2) $1/3 + 3/5 + 5/7 + 7/9 + \cdots$

(3) $\sum_{n\geq 1} \frac{10^n}{(2n-1)!}$

(4) $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \cdots$

(5) $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin 2^k}{3^k}$

(6) $\sum_{k\geq 1} (\frac{2}{3})^k$

(7) $\sum_{k\geq 0} \frac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$

(d) Qual é o maior intervalo em que as seguintes séries convergem?

(1) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

(2) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{2^k}$

(3) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$

(ii) Derivadas:

(a) Determina a primeira derivada das seguintes funções e demonstra isto via Definição 3.2.

(1) $f(x) = 2 \cdot x^4$

(2) $f(x) = 5x^2 + 2x$

(b) Determina a primeira derivada das seguintes funções:

(1) $f(x) = \frac{5}{x^4} - 6\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{x^3}$

(2) $f(x) = \frac{\pi x}{1-x^2}$

(3) $f(x) = 3x^2 - \frac{\sin x}{2} + 2^7 \tan x$

(4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

(5) $f(x) = \frac{7x^2-6x}{e^x}$

(6) $f(x) = \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(7) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$

(8) $f(x) = \ln \tan(\frac{x}{2})$

(c) Questões conceituais:

(1) Seja $f(x) = \sqrt[2]{9 + x^2}$.

(I) Deriva $f(x)$!

(II) Dá a equação da reta tangente para $x = 4$!

(III) Calcula a diferença entre o valor da função e da sua reta tangente em $x = 4$ para $x = 4{,}1$!

(2) A altura de um corpo acima de uma superfície de água parada após t segundos seja dada por

$$h(t) = (t^3 - 2t^2 - 3t)\mathrm{e}^{-t}.$$

(I) Quando o corpo toca a superfície ?

(II) Qual é a sua altura máxima acima da superfície?

(III) Qual é a sua profundeza máxima abaixo da superfície?

(IV) Quando a sua altura cresce, e quando decresce, com a maior rapidez?

(3) Seja $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$ o caminho em quilómetros percorrido por um carro após t horas.

(I) Deriva $s(t)$! Qual distância, em quilómetros, percorreu o carro após 1 hora? Qual velocidade momentânea, em quilómetros por hora, tem o carro após 1 hora?

(II) Dá a equação da reta tangente no momento $t = 1$! Quantos quilómetros percorreria o carro após 61, 66, 90 e 120 minutos se após 1 hora a sua velocidade momentânea permanecesse constante? Compara estes números hipotéticos com os números reais!

(4) A altura de um pinheiro em centímetros com t anos de idade é dada pela função $h(t) = \frac{4000}{1+9e^{-0{,}058t}} - 400$.

(I) A qual altura converge o pinheiro ao longo dos anos?

(II) Deriva a função $h(t)$! Quantos centímetros por ano cresce o pinheiro no seu décimo aniversário?

(III) Dá a equação da reta tangente no momento $t = 10$! Quantos centímetros cresceria o pinheiro após 3, 6, 12 e 24 meses se após 10 anos a velocidade momentânea do seu crescimento permanecesse constante? Compara estes números hipotéticos com os números reais!

(IV) Com quantos anos o pinheiro atinge 16 metros de altura? Quantos centímetros por ano cresce o pinheiro nesta idade?

(5) Um homem está em um barco num lago com uma orla reta. A distância ao ponto mais próximo K da orla é 8 quilómetros. O homem quer chegar ao ponto Z da orla à uma distância de 10 quilómetros do ponto K. O homem rema com uma velocidade momentânea de 3 quilómetros por hora a um ponto M da orla entre K e Z e em seguida anda de M a Z como uma velocidade momentânea de 5 quilómetros por hora. Qual ponto M entre K e Z o homem deve escolher para chegar a Z o mais rápido possível?

(6) O número $f(t)$ de bactérias em um humo após t segundos seja dada por $f(t) = \frac{\mathrm{G}}{1+\mathrm{A}\exp(-0{,}2t)}$ No momento $t = 0$ sejam 1000 e no limite 20000 bactérias no humo.

(I) Determina os parâmetros G e A!

(II) Mostra que $f(t)$ cresce monotonamente!

(III) Em qual momento o humo contém 10000 bactérias? Qual é a velocidade de crescimento da população de bactérias neste momento?

(IV) Em qual momento a população cresce o mais rápido?

(7) Seja $f(x) = x^3 - x$ e seja $x_0 = 1$.

(I) Qual é a equação da reta secante de f entre x_0 e $x_0 + h$ para $h = 1/10$? Onde intersecta o eixo-x?

(II) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f em x_0? Onde intersecta o eixo-x?

(III) Qual é a diferença entre a inclinação da reta secante e a da reta tangente?

(IV) Onde intersecta o gráfico de f o eixo-x?

(iii) Derivadas parciais de funções de múltiplas variáveis: Determina as derivadas parciais do primeiro grau das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

(b) $c(a,b,\gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

(d) $g(x,t) = \frac{2x-t}{x+2t}$

(e) $f(x,y) = \cos(ax - by)$

(f) $g(x,y) = \sin^2(x + y) - \sin^2 x - \sin^2 y$

(g) $f(x,y) = x^y$

(h) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

(iv) Integrais:

(a) Determina as seguintes integrais (= funções primitivas):

(1) $\int e^x(1 - \frac{e^{-x}}{x^2})\,dx$

(2) $\int \frac{(x^2+2)^2}{x^3}\,dx$

(3) $\int \frac{17x-17}{\sqrt{x}-1}\,dx$ (Dica: Fórmula binomial.)

(4) $\int \frac{10x^8+3}{x^4}\,dx$

(5) $\int \frac{\sqrt{2x\sqrt{3x}}}{\sqrt[4]{x^3}};\,dx$

(6) $\int e^{-x}\,dx$

(b) Determina as seguintes integrais (= funções primitivas) por integração parcial ou substituição:

(1) $\int x \cos x \, dx$

(2) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} \, dx$

(3) $\int x \sin x \, dx$

(4) $\int x^2 \cos x \, dx$

(5) $\int \ln x \, dx$

(6) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$

(7) $\int e^{x^3} x^2 \, dx$

(8) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} \, dx$

(9) $\int (\frac{x}{2} - 1) \ln(3x + \frac{1}{5}) \, dx$

(c) Determina as seguintes integrais por frações parciais:

(1) $\int \frac{3x^4-6x^3-63x^2-4x+2}{x^2-2x-63} \, dx$

(2) $\int \frac{x^4+2x^3-x^2-x}{x^3+x^2-x-1} \, dx$

(d) Determina as seguintes integrais impróprias:

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} \, dx$ para $n > 1$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} \, dx$

(3) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} \, dx$ para $n > 1$

(4) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2} \, dx$

(5) $\int_1^\infty e^{-2x} \, dx$

(6) $\int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}} \, dx$

(e) Questões conceituais:

(1) Calcula a área delimitada pela curva $y = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$ e o eixo-x!

(2) Um bastão de 1 metro de comprimento tem um diâmetro de $1 + x$ centímetros para x em $[0,1]$. Qual é o seu volume?

(3) Um objeto é arremessado *horizontalmente* com uma velocidade momentânea de 9,81 metros por segundo numa altura de 19,62 (sem consideração da resistência área).

  (I) Depois de quantos segundos o objeto aterra?

  (II) Qual é a sua velocidade neste momento?

  (III) Quantos metros percorre o objeto até aterrar?

(4) Um produto vende-se em cada unidade de tempo $f(t) = 12000\frac{\exp(-t/a)}{(2+\exp(-t/a))^2}$ vezes (para um parâmetro a). Mais exatamente, supõe-se que se vende 0,5 unidades na primeira unidade, depois 1,5 unidades, isto é, na n-ésima unidade $n - 0{,}5$ produtos.

(I) O que acontece para $t \to \infty$?

(II) Quantos exemplares podem ser vendidos ao total?

(5) A probabilidade que o período de vida de uma peça em anos é $\int_a^b p(t)dt$ para $p(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ para $\lambda > 0$.

(I) Mostra que a probabilidade que uma peça falhe um dia é 1!

(II) Com qual probabilidade a peça dura pelo menos 5 anos? Com qual probabilidade falha antes?

(6) Seja $f(x) = 3x - 3x^2$ e $n = 3$.

(I) Em qual intervalo o gráfico de f está acima do eixo-x?

(II) Para aproximar (neste intervalo) a área circundada pela curva e o eixo-x, soma a área de n retângulos que têm a mesma largura (= base) e cujos ângulos superiores esquerdos tocam a curva! Calcula esta soma para os retângulos cujos ângulos superiores *direitos* (em vez de esquerdos) tocam a curva!

(III) Calcula a área circundada pela curva e o eixo-x! Compara esta às áreas aproximativas, isto é, calcula a diferença a ambas as somas das áreas dos retângulos!

(7) Um corpo é soltado na altura de 2000 metros e atinge após t segundos a velocidade momentânea de $v(t) = 50(1-\exp(-t/5))$ metros por segundo. Determina a sua altura em dependência do tempo t!

(8) Calcula a área delimitada pelas curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ e as retas $x = 0$, $x = 4$ e $y = 0$!

Soluções

(i) Sequências, Limites e Séries:

(a) (1) $-6/5$
(2) 0
(3) $125/27$
(4) $1/2$
(5) $1/2$
(6) $\sqrt{e}$
(7) $\frac{1}{e\sqrt[4]{e}}$
(8) $-5/4$
(9) $27/8$
(10) $\sqrt{e}$
(11) $5/4$,
(12) $6/5$,
(13) $3/2$,
(14) $e^{1/2}$,
(15) 1, e
(16) -1.

(b) (1) 2
(2) 2
(3) ∞
(4) ∞
(5) ∞

(c) (1) não converge
(2) não converge
(3) critério de quociente
(4) converge
(5) convergente
(6) diverge
(7) converge

(d) Os raios são:

(1) $r = 1$
(2) $r = 1$
(3) $r = 2$
(4) $r = 1$
(5) $r = 1$

(ii) Derivadas:

(a) Demonstração da Derivada:

(1) Fórmula binomial.

(2) Fórmula binomial.

(b) Computação da Derivada:

(1) $-12/x^5 - 4/\sqrt[3]{x} + 3/\sqrt[4]{x}$
(2) $\pi\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
(3) $6x - \frac{\cos x}{2} + 2^7/\cos^2 x$
(4) $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

(5) $\frac{-7x^2+20x-6}{e^x}$

(6) $\frac{-15x}{(1+x^2)^2\sqrt[2]{1+x^2}}$

(7) $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$

(8) $\frac{1}{\sin x}$

(c) Questões conceituais:

(1) (I) Tem-se $f'(x) = \frac{x}{\sqrt[2]{x^2+9}}$

(II) Tem-se $T_1(x) = (4/5)x + 9/5$

(III) Tem-se $f(4{,}1) \approx 5{,}08035$ e $T_1(x) = 5{,}08$.

(2) (I) Os zeros são $t = 0$ e $t = 1 \pm \sqrt[2]{1+3} = 1 \pm 2$.

(II) A derivada $h'(t) = -(t^3 - 5t^2 + t + 3)\exp(-t)$ tem um zero para $t = 1$. Por divisão polinomial por $(t-1)$, obtemos os outros zeros $2 \pm \sqrt[2]{7}$. A maior altura para $t = 2 + \sqrt[2]{7}$.

(III) A maior profundeza é obtida para $t = 1$.

(IV) A derivada $h''(t) = (t^3 - 8t^2 + 11t + 2)\exp(-t)$ tem um zero para $t = 2$. Por divisão polinomial por $(t-1)$, obtemos os outros zeros $3 \pm \sqrt[2]{10}$. A aceleração é máxima para $t = 2$ e mínima para $t = 0$.

(3) ...

(4) ...

(5) ...

(6) ...

(7) ...

(iii) Derivadas Parciais:

(a) $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$

(b) $f_x = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{z}, f_y = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, f_z = \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}$

(c) $c_a = \frac{a-b\cos\gamma}{c}, c_b = \frac{b-a\cos\gamma}{c}, c_\gamma = \frac{ab\sin\gamma}{c}$

(d) $g_x = \frac{5t}{(x+2t)^2}, g_t(\frac{-5}{(x+2t)^2}$

(e) $f_x = -a\sin(ax-by), f_y = b\sin(ax-by)$

(f) $g_x = 2\sin y\cos(2x+y), g_y = 2\sin x\cos(x+2y)$

(g) $f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y\ln x$

(h) $f_x = yze^{xyz}, f_y = xze^{xyz}, f_z = xye^{xyz}$

(iv) Integrais

(a)

(1) $e^x + 1/x$

(2) $x^2/2 + 4\ln|x| - \frac{4}{2x^2}$

(3) $17(2/3x\sqrt{x} + x)$

(4) $2x^5 - \frac{1}{x^3}$

(5) $\sqrt{2\sqrt{3x}}$

(6) $-e^{-x}$

(b) Integração parcial e Substituição:

(1) Integração parcial com $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x$.

(2) Põe $u(x) = 1 + x^3$ para obter $\sqrt{3}(1 + x^3)^2$

(3) Integração parcial com $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$

(4) Duas vezes integração parcial com $f(x) = x^2$

(5) $x\ln x - x$ com $g'(x) = 1$

(6) Põe $u(x) = \cos x$ para obter $\frac{1}{2\cos^2 x}$

(7) Põe $u(x) = x^2$ para obter $\frac{1}{3}e^{x^3}$

(8) $\sqrt{3}(1 + x^3)^2$

(9) $(\frac{x^2}{4} - x - \frac{61}{900} \cdot \ln(3x + \frac{1}{5}) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{61}{60}x$

(c) Frações Parciais:

(1) $\frac{17}{8} \cdot \ln|x - 9| + \frac{15}{8} \cdot \ln|x + 7|$

(2) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}\ln|x - 1| - \frac{5}{4}\ln|x + 1| - \frac{1}{2(x+1)}$

(d) Integrais impróprias:

(1) $\frac{1}{n-1}$

(2) divergente

(3) $\frac{1}{n-1}$

(4) $\ln 2$

(5) 1

(6) ...

(e) Questões conceituais:

(1) Por sucessiva divisão polinomial, obtemos os zeros $x = 1, 3$ e 5. A função é negativa no intervalo $[1, 3]$ e positiva em $[3, 5]$. Calculámos como função primitiva $F(x) = x^4/4 - 3x^3 + (23/2)x^2 - 15x$. Obtemos $\int_1^5 |f(x)| = \int_1^3 -f(x) + \int_3^5 f(x) = 2F(3) - F(1) - F(3 = 8)$.

(2) O volume é dado por $\int_0^{100} \pi/4(1+x)^2 dx = \pi 700/12$ centímetros cúbicos.

(3) A sua velocidade momentânea horizontal é $x(t) = 9{,}81t$ e a sua velocidade momentânea vertical é $y(t) = h_0 - (g/2)t^2 = 19{,}62 - 4{,}905t^2$.

(I) A altura $y = 0$ é atingida para $t = 2$.

(II) A velocidade momentânea é dada pela fórmula $v(t) = \sqrt[2]{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 9.81\sqrt[2]{1+t^2}$. Logo, tem a velocidade momentânea $v(2) \approx 21{,}84$ metros por segundo.

(III) O caminho percorrido é dado pelo comprimento da curva que é dada pela integral $\int_0^2 v(t)dt \approx 29$ onde $\int v(t) = \ln(t + \sqrt[2]{1+t^2})$

(4)

(I) Tem-se $\lim f(t) \to 12000(0/2) = 0$ para $t \to \infty$. Em particular, $f(n) \to 0$ para $n \to \infty$.

(II) Ao total, vendem-se $f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+\cdots$ exemplares. Vale aproximadamente $f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + \cdots = \int_0^\infty f(t)dt = 2000a$.

(5) Temos como função primitiva de $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ a função $F(t) = -\exp(-\lambda t)$.

(I) A probabilidade total é $\lim F(b) - F(0) = 1$ para $b \to \infty$.

(II) A probabilidade de pelo menos 5 anos de duração é $\int_5^\infty p(t) = F(\infty) - F(5) = e^{-5\lambda}$. De no máximo 5 anos é $1 - e^{-5\lambda}$.

(6) ...

(7) ...

(8) ...

Referências Bibliográficas

[P] L.Papula, *Mathematik para Ingenieure e Naturwisschenschaftler, Band 1*, Vieweg, 12. Auflage, 2008.

[FF] Fetzer, Fränkel, *Mathematik 1*, Springer, 7. Auflage, 2002.

E-mail: enno.nagel@uni-muenster.de