Vorlesung Analysis an der Fachhochschule Ahaus

Enno Nagel

Wintersemester 2009/10

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Funktionen, Beispiele und Eigenschaften

Heute wollen wir den Begriff der (reellen) Funktion einführen. Durch diese lassen sich Abhängigkeiten zweier Größen beispielsweise in der Physik oder Wirtschaft gut beschreiben.

1.1 Definition und Beispiele von Funktionen

Ich möchte zunächst einige Beispiele für Funktionen geben.

Exempel 1.1.

(i) Der Weg s, den ein Körper beim freien Fall zurücklegt, hängt von der Fallzeit t ab: $s = g \cdot t^2$; hierbei ist g die Konstante der Erdbeschleunigung ($9{,}8\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$).

(ii) Die Anziehungskraft K, die zwischen zwei Massenpunkten wirkt, hängt von den beiden Massen m', m'' und deren Entfernung r ab: $\mathrm{K} = \mathrm{G}(m'm'')/r^2$ (Newtonsches Gravitations-Gesetz); hierbei ist $\mathrm{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$ Newtons universelle Gravitationskonstante.

(iii) Die Fakultätsfunktion $f(n) = n! = n(n-1)\cdots 1$ = Anzahl der Permutationen von n Gegenständen.

(iv) Der Preis einer Kasperletheater-Karte hängt von der Nummer der Sitzreihe ab. Diese Abhängigkeit wird durch eine Preistabelle beschrieben: Nummer der Reihe 1,2,3 und Preis 100 Cent, 20 Cent, 5 Cent.

Definition 1.2. Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.

Diese (eindeutige) Zuordnung wird durch das Funktionszeichen in der Form $y = f(x)$ symbolisch ausgedrückt. Dabei sind folgende Bezeichnungen üblich:

- x = Unabhängige Veränderliche (Variable) oder Argument
- y = Abhängige Veränderliche(Variable) oder Funktionswert
- D = Definitionsbereich der Funktion
- W = Wertebereich oder Wertevorrat der Funktion, die Menge aller tatsächlich angenommenen Werte, also etwa $\mathrm{W}\sin = [-1{,}1]$ und $\mathrm{W} f = \{c\}$ für die konstante Funktion $f \equiv c$.

In unseren Beispielen:

(i) Hier ist (der Betrag von) $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, f(t) = s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Also $\mathrm{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathrm{W} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) Hier ist (der Betrag von) $m', m'' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Also $\mathrm{D} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathrm{W} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(iii) Hier $n \in \mathbb{N}$ und $n! \in \mathbb{N}$, also $\mathrm{D} = \mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$ und $\mathrm{W} = \{1,2,6,24,120,\ldots\}$.

(iv) Hier $\mathrm{D} = \mathbb{N} = \{1,2,3\}$ e $\mathrm{W} = \{100,20,5\}$.

Im folgenden werden wir ausschließlich Funktion mit $\mathrm{D}, \mathrm{W} \subset \mathbb{R}$ betrachten. Man spricht von **reellen** Funktionen. Da wir allein diese studieren werden, werden wir diese auch einfach abkürzend Funktionen nennen. Wir treffen eine erste Bequemlichkeitsvereinbarung: Da wir es also ausschließlich mit reellen Funktionen und Zahlen zu tun haben, sollen ab nun alle Variablen wie $a, b, c, \ldots, x, y, z$ reelle Zahlen bezeichnen. Eine Ausnahme bilden die lateinischen Buchstaben n, m. Diese werden wir oft für Aufzählungen benutzen und bezeichnen daher natürliche Zahlen.

Die reellen Funktionen können in verschiedenen Gewändern auftreten:

(i) In Form einer Gleichung, wie in den obigen Beispielen: $y = f(x)$, zum Beispiel $y = x^2, \sin x \ldots$. Hierbei treffen wir von nun an, um uns Schreibarbeit zu ersparen, folgende **Vereinbarung**: Schreiben wir nur die Zuordnungsvorschrift, wie beispielsweise $f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$ oder $\sqrt{x}$ hin, so soll der Defininitionsbereich **die umfassendste Teilmenge von** $\mathbb{R}$

sein, für die diese definiert ist. Der **Wertevorrat** ist dann automatisch als die Menge $\{f(x)|x \in \mathrm{D}\}$ erklärt. In unseren Beispielen ist $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \{0{,}3\}$ bzw. $\mathrm{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ (und $\mathrm{W} = \mathbb{R}_{\geq -4/9} - \{0\}$ bzw. $\mathrm{W} = \mathbb{R}_{\geq 0}$).

(ii) In einer Wertetabelle, beispielhaft wie folgt: In einem Versuch wird der Spannungsabfall U an einem ohmschen Widerstand in Abhängigkeit von der Stromstärke I gemessen. Die Wertetabelle hat dabei das folgende Aussehen: $\mathrm{I} = 50; 100; 150 \ldots (m\mathrm{A})$ und $\mathrm{U} = 2; 4{,}6; \ldots (\mathrm{V})$. Hier ist $\mathrm{D} = \{50{,}100, 150, \ldots\}$ (und $\mathrm{W} = \mathbb{R}_{\geq 0}$). (Wir würden diese Funktion gerne für beliebige Argumente in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kennen und vermuten, dass allgemein $\mathrm{U} = \mathrm{RI}$ mit $\mathrm{R} = 0{,}04\Omega$.)

(iii) Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ ordnet jedem x-Wert in eindeutiger Weise einen y-Wert zu ; $x_0 \mapsto y_0 = f(x_0)$. Das Wertepaar $(x_0; y_0)$ kann dann als ein Punkt P der Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet werden ([P, S.139]). Die reellen Zahlen x_0 und y_0 heißen dann die **(kartesischen) Koordinaten** des Punkts P. Für jedes Wertepaar (x_0,y_0) erhalten wir genau einen Punkt. Die Menge aller Punkte $(x,y = f(x))$ bildet die Funktionskurve (auch Schaubild oder Funktionsgraf genannt), die den Funktionsverlauf von $y = f(x)$ veranschaulicht. (Bsp. Parabel, lineare Funktion.)

Um die Kurve zu zeichnen geht man in der Praxis zweckmäßigerweise wie folgt vor: Man erstellt zunächst eine Wertetabelle indem man einige Parameterwerte vorgibt, dann die zugehörigen x- und y-Werte aus den gegebenen Parametergleichungen berechnet und diese Wertepaare schließlich als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellt. Durch Verbinden dieser (dicht genug aufeinanderfolgenden Punkte erhält man dann den gesuchten Kurvenverlauf).

Aus zwei Funktionen f und g (über beliebigen Definitions- und Wertebereichen) lässt sich durch Hintereinanderschaltung, eine neue bilden, ihre **Verknüpfung** $g \circ f$, solange der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist, $\mathrm{W}(f) \subseteq \mathrm{D}(g)$. Es gilt

$$g \circ f : x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)),$$

das heißt, um $g \circ f(x) = g(f(x))$ zu erhalten, ersetzen wir x in $g(x)$ durch $f(x)$.

1.2 Monotonie und Umkehrbarkeit von Funktionen

Wir werden uns bald mit dem wichtigen Problem der Umkehrung einer Funktion beschäftigen. Ob dies gelingt wird dabei entscheidend von einer speziellen Eigenschaft der Funktion abhängen, die man als Monotonie bezeichnet. Dieser Begriff wird wie folgt definiert:

Definition 1.3. Sei $f\colon D \to W$ eine Funktion und $x_1 < x_2$ aus D. Dann heißt die Funktion

- **monoton wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$,
- **monoton fallend**, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, falls $f(x_1) > f(x_2)$.

Eine streng monoton wachsende Funktion besitzt demnach die Eigenschaft, dass zum kleineren x-Wert stets auch der kleinere y-Wert gehört. Bei einer streng monoton fallenden Funktion ist es genau umgekehrt ([P, S.144]).

Exempel 1.4. [P, S.145] Streng monoton wachsende Funktionen sind :

(i) Jede Gerade mit positiver Steigung.

(ii) Kubische Parabel.

Streng monoton fallende Funktionen sind :

(i) Jede Gerade mit negativer Steigung.

(ii) Radioaktiver Zerfall : Beim natürlichen radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl n der Atomkerne nach einem Exponentialgesetz mit der Zeit t ab.

(iii) Entladung eines Kondensators: Entlädt man einen Kondensator über einen ohmschen Widerstand, so klingt die Kondensatorspannung U exponentiell mit der Zeit t ab.

Die Parabel $y = x^2$ ist in $\mathbb{R}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend. Beschränkt man sich jedoch auf das Intervall $x \geq 0$, so verläuft die Parabel dort streng monoton wachsend. Im Intervall $x \leq 0$ dagegen ist sie streng monoton fallend.

Nach Definition ordnet eine Funktion $f(x)$ jedem Argument $x \in \mathrm{D}$ genau einen Funktionswert $y \in \mathrm{W}$ zu. Häufig stellt sich das umgekehrte Problem: Zu einem vorgegebenen Funktionswert y ist der zugehörige x-Wert zu bestimmen. Folgt aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$, das heißt gehören zu verschiedenen x-Werten stets auch verschiedene y-Werte, so gehört zu jedem y-Wert auch genau ein x-Wert. Eine Funktion $y = f(x)$ mit dieser Eigenschaft heißt **umkehrbar**. Aus dem Zwischenwertsatz folgt (der noch einzuführen ist), dass wir bereits das passende Kriterium dafür zu Hand haben: Eine stetige (was noch zu definieren ist) Funktion ist umkehrbar genau dann, wenn sie entweder streng monoton fallend oder steigend ist.

Ist eine Funktion $f(x)$ umkehrbar, so gehört zu jedem $y \in \mathrm{W}$ genau ein $x \in \mathrm{D}$. Für die durch diese eindeutige Zuordnung gewonnene Funktion verwenden wir kurzfristig die Bezeichnung $x = g(y)$. Jetzt aber ist y die unabhängige und x die abhängige Variable und wir müßten bei einer grafischen Darstellung der Funktion in einem rechtwinkligen Koordinatensystem konsequenterweise die Bezeichnungen der beiden Achsen miteinander vertauschen. Dies aber ist allgemein nicht üblich. Statt dessen vertauscht man in der Gleichung $x = g(y)$ die beiden Variablen miteinander und erhält auf diese Weise eine neue Funktion $y = f^{-1}(x)$, die als **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von $f(x)$ bezeichnet wird (siehe [P, S. 149]). Daher vertauschen wir also nicht die Beschriftungen der x- und y-Achse, sondern haben , wenn wir die Umkehrfunktion zeichnen wollen, die Funktion an der Diagonalen $y = x$ zu spiegeln (wenn der gleiche Maßstab verwendet wird). Man kann auch griffiger formulieren: Eine Funktion f hat die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$, falls $g(f(x)) = x$ und $f(g(x)) = x$ gilt. Zum Beispiel gilt auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $\sqrt{(x^2)} = x = (\sqrt{x})^2$ für $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ oder $(2x+1)/2 - 1/2 = x = 2(x/2 - 1/2) + 1$ für $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = x/2 - 1/2$.

Exempel 1.5.

Die Parabel $y = x^2$ ist *nicht* auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar, sondern nur auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $\mathbb{R}_{\leq 0}$ (durch die Wurzelfunktion).

Die Funktion $y = x^2$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Funktion $y = 2x + 1$ ist streng monoton wachsend, also umkehrbar.

Die Sinus-Funktion (gegeben durch die Länge der Gegenkathete auf dem Einheitskreis) ist auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend und besitzt dort eine Umkehrfunktion, den Arcussinus.

Wir fassen zusammen:

(i) Jede streng monoton wachsende oder fallende Funktion ist umkehrbar.

(ii) Bei der Umkehrung einer Funktion werden Definitions- und Wertebereich miteinander vertauscht.

(iii) Das Schaubild der Umkehrfunktion ist die Spiegelung der Funktionskurve an der Diagonalen $y = x$.

1.3 Der Grenzwert von Folgen

Hierzu das Paradoxon von Archimedes und der Schildkröte: Archimedes laufe mit einer Geschwindigkeit von 1m/s, die Schildkröte schaffe immerhin 1dm/s, sei also zehnmal so langsam. Es starten beide bei null und habe die Schildkröte einen Meter Vorsprung. Dann ist in der nächsten Sekunde Archimedes bei 1, die Schildkröte bei 1,1. Nach 1,1 Sekunden ist Archimedes bei 1.1, die Schildkröte bei 1,11. Nach 1,11 Sekunden ist die Schildkröte immer noch vorn, diesmal um 1mm. Holt Archimedes die Schildkröte nie ein? Die Lösung: 1,11111 ... Sekunden ist nicht ∞, entsprechend nie, sondern eine reelle Zahl, der *Grenzwert* der Folge $1 + 1/10 + 1/100 + \ldots = 10/9$, das ist der Wert an dem Archimedes und die Schildkröte gleichauf sind (Geraden-Schnittpunkt).

Ein etwas weniger offensichtliches Beispiel: Wir möchten Geld bei einer Kamikaze-Bank anlegen, 100 Euro für einen Zeitraum von 100 Tagen bei einem Zinssatz von 100%. Dann hätten wir nach 100 Tagen 200 Euro auf dem Konto. Nehmen wir an, die Bank wisse nichts vom Zinseszins. Wir könnten dann vorschlagen anstatt einmal 100% zehnmal, also alle 10 Tage, 10% Zinsen ausgezahlt zu bekommen. Dann haben wir nach 10 Tagen $110 = 100 \cdot (1{,}1)$ Euro auf dem Konto, nach 20 Tagen $110 \cdot (1{,}10) = 121 = 100 \cdot (1{,}1)^2$ Euro auf dem Konto und schließlich nach 100 Tagen sogar $100 \cdot (1{,}1)^{10} = 100 \cdot 2{,}5937424601 \approx 259$ Euro statt 200 Euro auf dem Konto. Werden wir also beliebig reich, wenn wir die Auszahlungsintervalle nur beliebig klein wählen? Nein, wenn wir unser Geld und wenn wir das Geld in 1.000.000-tel Raten auszahlen ließen, also etwa sekündlich, dann hätten wir etwa

$$100 \cdot (1{,}0000001^{1.000.000}) \approx 100 \cdot 2{,}7183 = 271{,}83$$

Euro auf dem Konto. Wir beobachten also, dass der Wert $(1+1/n)^n$ gegen die Zahl $\mathrm{e} = 2{,}7182818\ldots$ strebt. Wir wollen nun ausformulieren, was wir eigentlich damit meinen, dass diese Folge gegen die Zahl e strebt.

Definition 1.6. Eine Folge (reeller Zahlen) (a_n) strebt oder **konvergiert** gegen einen Grenzwert oder **Limes** a, falls zu jedem noch so kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ ab einem Index n_0 (das heißt, für alle $n \geq n_0$) der Abstand $|a - a_n| \leq \varepsilon$ ist. Wir schreiben $(a_n) \to a$ oder auch $\lim a_n = a$.

Exempel 1.7.

Die Folge $1 + 1/10 + 1/10^2 + \cdots \to 10/9$.

Die Folge $(1+1/n)^n \to e$.

1.4 Die Exponential- und Logarithmus-Funktion

Wir haben uns im vorigen Unterabschnitt davon überzeugt, dass $(1+1/n)^n \to \mathrm{e}$. Dies entsprach einer Verzinsung von 100%. Es konvergiert aber auch für jeden anderen (sogar negativen) Zinssatz x, beispielsweise $x = 0.05$ für einen Zinssatz von 5%, die Folge $(1+x/n)^n$ gegen einen Grenzwert. Diesen bezeichnen wir mit e^x.

Definition 1.8. Es sei e die Eulersche Zahl. Dann heißt $f(x) = \lim(1+x/n)^n$ die **Exponentialfunktion** (zur Basis) e. Wir schreiben auch suggestiv $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Bemerkung 1.9.

Es gilt $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Bisher ist uns nur klar, wie rationale Exponenten von e gebildet werden, also beispielsweise $\mathrm{e}^{n/2} = \sqrt{\mathrm{e}^n}$. Durch die e-Funktion können jetzt aber auch beliebige reelle Exponenten erklärt werden. Dass die e-Funktion sich so wie die rationalen Exponenten $x^2, \sqrt{x}, \ldots$ verhält, halten wir kurz fest:

(i) $\mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}$.

(ii) $(\mathrm{e}^x)^r = \mathrm{e}^{xr}$.

(iii) Die e-Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend (Schaubild).

Also gelten für die Exponentialfunktion die gleichen Gesetze wie aus der Potenzrechnung bekannt. *Aber*: Hier ist die Variable die *Potenz* und nicht der Basiswert, wie beispielsweise bei $x \mapsto x^2$.

Wir haben bemerkt, dass die e-Funktion streng monoton wächst, also nach dem vorherigen Unterabschnitt eine Umkehrfunktion besitzt. Diese heißt die **natürliche Logarithmus-Funktion**.

Definition 1.10. Die Umkehrfunktion der e-Funktion heißt **natürliche Logarithmus-Funktion**. Wir schreiben $\ln(x)$.

Bemerkung 1.11.

- Da der Wertebereich von e^x ganz $\mathbb{R}_{>0}$ ist, gilt also $\mathrm{D}\ln = \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathrm{W}\ln = \mathbb{R}$.
- Es gilt nach Definition $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$. Speziell $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$.
- Die Logarithmus Funktion hat die folgenden, denen der e-Funktion entsprechenden Eigenschaften:
  (i) $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$
  (ii) $\ln x^r = r \ln x$
  (iii) Die ln-Funktion ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wachsend (Schaubild).

  Beweis: Übungsaufgabe. ■

Exempel 1.12.

- Radioaktiver Zerfall: Eine radioaktive Substanz zerfällt auf natürliche Weise nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz $n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$.

  Dabei bedeuten: n_0 = Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne, $n(t)$= Anzahl der Atomkerne zur Zeit t, λ = Zerfallskonstante ([P, S.270].
- Ein weiteres Beispiel liefert die Entladung eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R. Die Kondensatorspannung U klingt dabei exponentiell mit der Zeit t ab: $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/RC}$. Hierbei sind U_0: Kondensatorspannung zu Beginn, RC: Zeitkonstante.
- Bei einem KFZ-Stoßdämpfer legt der Kolben beim Einschieben einen Weg y nach dem Zeitgesetz $y = y_0(1 - e^{-kt})$ zurück $(y_0 > 0, k > 0)$.
- Für weitere Beispiele siehe [P, S.270 ff].

Übung 1

(i) Gegeben sind die Näherungswerte $\ln 2 = 0{,}69$ und $\ln 3 = 1{,}10$. Berechnen Sie $\ln 4, \ln 6, \ln 27, \ln 324, \ln 108$. Dabei dürfen vom Taschenrechner nur die 4 Grundrechenarten benutzt werden.

(ii) Zeichnen Sie in ein gemeinsames Diagramm die Funktionsgrafen der Funktionen

$$f(x) = \ln x \quad f(x) = \ln|x| \quad f(x) = \ln x + 1 \quad f(x) = \ln(x+1).$$

(iii) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $e^x + 2e^{-x} = 3$.

(iv) Beweisen sie die Regeln $\ln x \ln y = \ln(x+y)$ und $\ln(rx) = (\ln x)^r$ unter Voraussetzung der entsprechenden Regeln für die e-Funktion [Also $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ und $(e^x)^r = e^{xr}$].

(v) Bestimme den Grenzwert der gegebenen Zahlenfolgen:

$$\frac{2n^3 - 5n^2 + 8}{7n^3 + 2} \qquad \left(1 - \frac{2}{n-3}\right)^{n+7} \qquad \frac{3n+4}{2n+1}$$

Bestimme für die dritte Folge $a_n = \frac{3n+4}{2n+1}$ zu $\varepsilon > 0$ eine untere Schranke $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sodass $|a - a_n| \leq \varepsilon$.

Hinweis zur zweiten Folge : Mit Grenzwerten kann man wie gewohnt rechnen, das heißt Grenzwertbildung und Addition und Multiplikation vertauschen. Benutzen Sie hier:

$$a_n b_n \to ab, \text{ falls } a_n \to a, b_n \to b.$$

(vi) Geben Sie Beispiele für Folgen an, die

(a) monoton wachsen und den Grenzwert $a = 7$ haben

(b) monoton fallen und den Grenzwert $a = 3$ haben

(c) die oszillierend ihrem Grenzwert $a = -6$ zustreben und deren Glieder nie kleiner als -12 und größer als -3 werden. Hierbei *oszilliert* eine konvergente Folge (a_n) gegen ihren Grenzwert a, falls aus $a_n > a$ folgt, dass $a_{n+1} < a$.

Lösungen

(iii) $e^x + 2e^{-x} = 3 \iff t^2 + 2 = 3t \quad \text{mit } t = e^x \ldots.$

(v) (a) 2/7

(b) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{2}{n-3})^{n+7} = \lim_{m\to\infty}(1 - 2/m)^{m+10} = e \cdot 1$

(c) $g = 3/2$ und $|*|\frac{3n+4}{2n+1} - 3/2 = |*|\frac{5/2}{2n+1} < \varepsilon \iff 2n + 1 > \frac{5}{2\varepsilon}$.

2 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

2.1 Grenzwerte im Unendlichen

Wie verhält sich die Funktion für immer größer werdende x-Werte? Sei beispielsweise $f(x) = 1/x$ und $(x_n) = (10, 100, 1000, \dots) \to \infty$. Dann $f(x_n) = 1/10, 1/100, 1/1000, \dots) \to 0$. Symbolisch $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$ oder $f(x) \to g$ für $x \to \infty$ (Schaubild $\sin x/x$). Bsp. $e^{-x}, 1/\ln x \to 0$.

Definition 2.1. Die Funktion $f(x)$ **besitze für** $x \to \infty$ **den Grenzwert** $g \in \mathbb{R}$ (oder f **konvergiere für** $x \to \infty$ **gegen den Grenzwert** g), falls für jeden noch so kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ eine untere Schranke $\mathrm{M} > 0$ existiert, sodass $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x > \mathrm{M}$.

Analog für $x \to -\infty$.

Bemerkung 2.2. Dies ist der Fall, wenn für alle $x \geq \mathrm{M}$ die Punkte des Graphen im ε-Schlauch um g liegen.

Exempel 2.3.

(i) Sei $f(x) = \frac{2x-1}{3x+6}$. Dann $f(x) \to 2/3$ für $x \to \infty$. (Schaubild [FF, S. 110]). Denn

$$\left|f(x) - 2/3\right| = \left|\frac{2x-1}{3x+6} - \frac{2}{3}\right| = \frac{-5}{3x+6} < \varepsilon \iff \frac{5}{3\varepsilon} < |x+2|.$$

(ii) Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dann $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$, da $|\sin| \leq 1$. (Schaubild [FF, S.111]).

(iii) Federpendel mit Masse m und Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\pi f$ und periodischer äußerer Kraft $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0 \sin(\omega t)$. Erst Einschwingphase, dann Kreisfrequenz ω. Schwingungsamplitude $\mathrm{A} = \mathrm{A}(\omega) = \frac{\mathrm{F}_0}{m|w^2 - w_0^2|}$ (Schaubild [P, S.184]). Wenn $\omega \to \omega_0$ gilt $\mathrm{A}(\omega) \to \infty$, Resonanzkatastrophe!

Wenn $\omega \to \infty$ gilt $A(\omega) \to 0$, das Pendel kann nicht mehr den raschen Änderungen folgen, also Stillstand!

Es kann auch passieren, dass f für $x \to \infty$ über alle Grenzen wächst. Dann spricht man von einem uneigentlichen Grenzwert.

Definition 2.4. Die Funktion f besitzt für $x \to \infty$ den **uneigentlichen Grenzwert** ∞, wenn zu jeder unteren Schranke $K > 0$ eine Schranke $M > 0$ existiert, sodass $f(x) > K$ für alle $x > M$. Schreibweise $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Analog für $x \to \pm\infty$ und $f(x) \to \pm\infty$.

Exempel 2.5.

(i) Betrachte $f(x) = e^x$. Wegen Limesbeschreibung und Bernoulli gilt $e^x \geq 1 + x$ und daher $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

(ii) Für $f(x) = x^2 + x$ gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

(iii) Es gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, wenn $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ (durch x^2 teilen).

(iv) Für die rationalen Funktionen $f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_0 x^m + \cdots + b_0}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & m < n \\ a_m/b_n, & m = n \\ \infty, & m > n, a_m/b_n > 0 \\ -\infty, & m > n, a_m/b_n < 0. \end{cases}$$

2.2 Grenzwert in einem Punkt

Exempel 2.6. Betrachte $f(x) = \sin(1/x)x$ in $x_0 = 0$.

Definition 2.7. Wir schreiben $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ für einen Grenzwert g, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x) - g| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta$ für $x \neq x_0$.

Satz 2.8. *Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert g genau dann, wenn für jede Folge (a_n) mit $\lim a_n = x_0$ gilt:*

$$\lim f(a_n) = g.$$

Exempel 2.9. Betrachte $f(x) = |1/x|$ in $x_0 = 0$.

Definition 2.10. Wir schreiben $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, wenn für jedes $K > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x)| > M$, falls $|x - x_0| < \delta$.

2.3 Stetigkeit von Funktionen

Exempel 2.11. Betrachte $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 2$ und die Folge

$$(x_n) = (1{,}9; 1{,}99; 1{,}999; \dots) \to 2.$$

Dann $(f(x_n)) = (3{,}61; 3{,}9601; 3{,}996001; \dots) \to 4$. Dass $f(x_n) \to 4$ gilt für jede Wahl einer Folge $x_n \to 2$. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Dann ist 4 der **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$.

Diese Unabhängigkeit des Grenzwertes der Bilder ist äquivalent zur folgenden Definition der Stetigkeit die wir hier verwenden. Anschaulich: $f(x)$ ist nahe bei $f(x_0)$, falls x_0 hinreichend nahe bei x_0 (Bild). Die folgende Definition ist Definition 2.7 für $g = f(x_0)$.

Definition 2.12. Die Funktion $f(x)$ ist **stetig** im Punkt x_0, wenn es für jeden noch so kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ falls $|x - x_0| \leq \delta$ (Hierbei ist f in einem Intervall um x_0 erklärt).
Wir sagen, dass eine Funktion **stetig** ist, falls sie es in allen Punkten (ihres Definitionsbereichs) ist.

Exempel 2.13.

(i) Sei $f(x) = 2x + 1$. Behauptung: f ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$ (für alle x).

(ii) Wie nah muss x bei $x_0 = 1$ liegen, damit $f(x) = 2x^2$ im Bereich $g \S \varepsilon = 2 \S 10^{-38}$ mit $g = f(x_0) = 2$ liegt? Antwort: $\delta = 0{,}5 10^{-38}$.

(iii) Fast alle bei uns betrachteten Funktionen sind stetig, beispielsweise Exponenziell-,Logarithmus Sinus-, Kosinus-, Wurzel- und rationale Funktionen.

2.4 Unstetigkeiten

Wenn f in x_0 nicht stetig, kann folgendes geschehen:

(i) f hat in x_0 eine Definitionslücke.

(ii) f ist dort definiert, aber der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht.

(iii) $f(x_0)$ und Grenzwert g existieren, sind aber verschieden!

Wir betrachten zu obigen Fällen passende Beispiele:

Exempel 2.14.

(i) **Hebbare Lücke**: Die Funktion $f(x) = \frac{3x^2-6x}{x-2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, hat aber wegen $\frac{3x^2-6x}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{x-2}$ dort den Grenzwert $g = 6$. Also können wir f zu einer Funktion g auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dies ist die Gerade $x+3$
Eine Definitionslücke x_0 kann also behoben werden, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und dann durch diesen Grenzwert dort fortgesetzt wird.

Aber: Dies muss nicht immer der Fall sein, beispielsweise bei $1/x$.

(i') **Unendlichkeitsstelle oder Pol**: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-3}^2$ besitzt bei $x_0 = 3$ eine Definitionslücke. Es gilt $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$. Da $\lim_{x\to 3} f(x)$ nicht existiert ist sie unbehebbar.

Aber: Es gibt auch Unstetigkeitsstellen, wo der Grenzwert noch nicht einmal uneigentlich existiert, beispielsweise wenn man die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$ durch $f(0) = 0$ fortsetzt, denn $f(1/((2n+1/2)\pi) = -1$ und $f(1/((2n+3/2)\pi) = 1$ (siehe [FF, S.123]).

(ii) **Sprungstelle**: Die Vorzeichenfunktion ist in $x = 0$ unstetig, besitzt dort nur "links- und rechtsseitige Grenzwerte", diese sind aber verschieden! Vertreter: Sprungfunktion der Regelungstechnik — Abart: Sägezahnimpuls, , siehe [P, S.189]. Dies sind Beispiele für **stückweise stetige** Funktionen.

(iii) Betrachte $f(x) = x$ falls $x \neq 0$, aber $f(0) = 1000$.

2.5 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 2.15. *Sind f,g an der Stelle x_0 stetig, so auch $f+g$, $f\cdot g$ und f/g (falls $g(x_0)\neq 0$) und es gilt*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)+g(x) = f(x_0)+g(x_0),$$
$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0),$$
$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)/g(x) = f(x_0)/g(x_0).$$

Bemerkung 2.16. Für mehr Rechenregeln, siehe [P, Tabelle 4.2.3].

Satz 2.17. *Sind f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$ stetig, dann ist auch die Verkettung h von f und g, $h(x) = g(f(x))$, stetig an der Stelle x_0 und es gilt* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0))$.

Satz 2.18. *Ist $f\colon [a,b] \to \mathrm{W}$ stetig und umkehrbar, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathrm{W} \to [a,b]$ stetig.*

Also: Stetigkeit von f,g bedeutet, dass man die Funktionsoperation und Grenzwertbildung vertauschen kann. Dadurch lassen sich viele scheinbar komplizierte Grenzwerte leicht ausrechnen, beispielsweise $\sqrt{\sin x}$ für $x \to \pi/2$ und $e^{\sqrt{x}}$ für $x \to 1$usw.

Die nachfolgenden theoretischen Sätze haben keinen direkten praktischen Nutzen, sondern spielen eine wichtige Rolle beim Aufbau der Differenzial- und Integralrechnung, das Herzstück der Vorlesung.

Satz 2.19. *Sei f an der Stelle x_0 stetig und $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ um x_0, in der alle Funktionswerte das Vorzeichen von $f(x_0)$ haben. (Bild!)*

Beweis: $\varepsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit. ■

Definition 2.20. Die Funktion f besitzt bei $x_0 \in [a,b]$ ein absolutes **Maximum bzw. Minimum**, falls für alle $x \neq x_0$ gilt, dass $f(x) < f(x_0)$ bzw. $f(x) > f(x_0)$.

Exempel 2.21.

(i) Die Funktion $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 0$.

(ii) Die Funktion $\sqrt{1 - x^2}$ auf $[-1,1]$ bei $x_0 = 0$.

Satz 2.22. *Wenn f in $[a, b]$ stetig ist, dann nimmt dort f sein absolutes Maximum (und Minimum) an (insbesondere also beschränkt).*

Bemerkung 2.23.

Wichtig! Abgeschlossenes Intervall, sonst beispielsweise $1/x$ auf $]0,1]$ (Bild).

Die absoluten Extremwerte können auf Rand oder im Inneren von [a, b] angenommen werden.

Lehre für die Minimax-Suche mittels Nullsetzen der Ableitung: Extremwerte am Rand werden über Nullsetzen der Ableitung (in der Regel) nicht erfasst!
Es gilt sogar:
Sei f in $[a,b]$ stetig und monoton. Dann werden die absoluten Extrema auf dem Rand von $[a,b]$ angenommen (Bild).

Satz 2.24 (Zwischenwertsatz). *Wenn f in $[a,b]$ stetig ist, dann wird jeder Funktionswert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ auch angenommen. Das heißt für jeden Wert y_0, mit $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, existiert mindestens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $y_0 = f(x_0)$. (Bild!)*

Übung 2

(i) Raten Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ für die untenstehenden Funktionen und beweisen Sie mittels unserer Definition 2.1, dass der jeweils geratene Grenzwert tatsächlich der Grenzwert ist:

(a) $\frac{4x^2+1}{2x^2}$

(b) $\frac{4x^2+\sin(x^2)}{2x^2}$

(c) $\frac{\cos x}{x}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(ii) Zeigen sie mittels Definition 2.1, dass

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0.$$

Benutzen Sie hierfür $\sqrt{x+1} < \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(iii) Beweisen Sie folgenden Satz: Gegeben seien zwei Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g beschränkt. Dann gilt: $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$.

(iv) Beweisen Sie mittels Definition 2.4, dass

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{4} = +\infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} 5\cos x - x^2 = -\infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4+2}{x^2+1} = -\infty$

(d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+5} = \infty$.

(v) Beweisen Sie mittels Definition 2.7 folgende Aussagen.

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{5x-2}{4} = 2$

(b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{2x} = -1/2$

(vi) Welchen Wert ist den folgenden Funktionen an der gegebenen Unstetigkeitsstelle zuzuordnen, um die Unstetigkeit zu beheben?

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ bei $x = 0$

(b) $f(x) = x \sin(1/x)$ bei $x = 0$

(c) $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$ bei $x = 0$

(vii) Für welche x-Werte besitzten folgende Funktionen Unstetigkeitsstellen und von welcher Art sind diese (hebbar, endlicher Sprung oder unendlicher Sprung).

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

(d) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

Lösungen

(i) (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$
 (b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$
 (c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
 (d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(vi) (a) $f(0) = 2$
 (b) $f(0) = 0$
 (c) $f(0) = \binom{n}{1} = n$

(vii) (a) Eine Polstelle bei $x = 2, -2$
 (b) Eine Polstelle bei $x = 2$, eine Hebbare bei $x = 2$ durch $f(2) = 1$
 (d) Eine Sprungstelle bei $x = 2$
 (e) Eine Sprungstelle bei $x = 0$

3 Differenzierbarkeit

Exempel 3.1. Bsp. $f(x) = x^2$, Punkte $x_0, x_0 + h$, erhalte Steigung $m_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Die Sekante dreht sich um $\mathrm{P} = (x_0, f(x_0))$. Dann gilt Tangentensteigung $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Existiert nicht, wenn beispielsweise $m \to \infty$ oder $f(x) = |f(x)|$. Berechnung von m für $x = 1/3x^2$ in x_0.

Bemerkung 3.2. Wir sehen: $m = 0 \iff$ Funktion hat Extremum außerhalb des Randes,
$m > 0 \iff$ Steigung positiv, $m < 0 \iff$ Steigung negativ.

Definition 3.3. Sei f in einem offenen Intervall $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ um x_0 definiert. Die Funktion f heißt **differenzierbar** in x_0, falls $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Schreibweise: $f'(x_0)$.
Die Funktion heißt **differenzierbar**, falls sie es in jedem Punkt ist.

Bemerkung 3.4.

(i) Ausführliche Definition des Grenzwerts.

(ii) Man schreibt auch $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f)_{x=x_0} = \mathrm{D}\,f(x_0)$.

(iii) Ist die Funktion differenzierbar in x_0, so dort auch stetig (da fast linear).

Exempel 3.5.

(i) Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle x_0 ist $6x_0^2$.

(ii) Ableitung von $f(x) = \frac{a}{x-b}$ an $x_0 \neq b$ ist $a/(x_0 - b)^2$ (Erweitern und Nenner herunterschieben).

Definition 3.6. Sei $f\colon]a,b[\to \mathrm{W}$ und differenzierbar. Dann heißt f' die **(erste) Ableitung** von f.

Bemerkung 3.7.

(i) Es ist also f', die Funktion, die x den Wert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ zuordnet.

(ii) Ist $y = f(x)$, so schreibt man $y' = f'(x)$.

Exempel 3.8.

(i) Es sei $f(x) = ax^n$. Dann $f'(x_0) = anx_0^{n-1}$. Hiebei benutze den Trick $x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{n-1})$ oder besser: Schreibe direkt als binomische Formel aus.

(ii) Beispielsweise $a = 8, n = 7$.

(iii) Betrachte $f(x) = |x|$. Wegen $f(x) = x$, falls $x < 0$, und $f(x) = -x$, falls $x > 0$, ist $f(x)$ in $x_0 \neq 0$ differenzierbar mit $f'(x) = 1$ bzw. $f'(x) = -1$ nach obigem Beispiel für $a = \pm 1$ und $n = 1$. Aber der links und rechtsseitige Grenzwert in $x_0 = 0$ ist -1 und 1, also dort *nicht differenzierbar.*

Exempel 3.9.

(i) Anwendungsbeispiel: $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ für $t \geq 0$, Weg des Apfels beim Fall von Höhe h_0. Ableitung gleich Geschwindigkeit, proportional zur Zeit.

(ii) Sei $w(t)$ die Arbeit, die eine Maschine bis t geleistet hat. Als Leistung P definiert man die Arbeit pro Zeiteinheit. Lasse Zeiteinheit beliebig klein werden. Dann ist $\mathrm{P}(t_0) = w'(t_0)$ Leistung zum Zeitpunkt t_0.

3.1 Ableitungen wichtiger Funktionen

Für eine Tabelle, siehe [P, Tabelle 1, Abschnitt IV.1.3].

Satz 3.10.

(i) *$f'x = 0$ für $f \equiv c$ die konstante Funktion (da Steigung ja null).*

(ii) *$f'(x) = anx^{n-1}$ für $f(x) = ax^n$.*

(iii) *$f'(x) = f(x)$ für $f(x) = e^x$.*

Beweis: Wir haben 2. (aus dem 1. folgt) bereits gezeigt. Wir möchten 3. zeigen: Wir berechnen

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

hierbei $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ für $h \to 0$ (später klar, da $e^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ die Taylorreihe von e^x). ∎

Bemerkung 3.11.

(i) Wir bemerken, dass die e-Funktion bis auf die 0-Funktion die einzige Funktion ist, deren Ableitung sie selbst ist.

(ii) Regel 2. gilt auch für Exponenten $n \in \mathbb{R}$.

Satz 3.12.

(i) $f'(x) = 1/x$ *für* $f = \ln x$.

(ii) $\sin'(x) = \cos x$ *und* $\cos'(x) = \sin(x)$.

Beweis:

(i) Werden wir gleich aus der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion erschließen.

(ii) Es gilt

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}).$$

Ist $y = x_0 + h$ und $x = x_0$, gilt also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \cos(x + h/2)\frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x,$$

da cos stetig ist und $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

∎

3.2 Rechenregeln beim Ableiten

Siehe auch hier [P, Abschnitt V.2] für eine Aufstellung.

Satz 3.13.

(i) *Die Faktorregel:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c \cdot f(x) = c \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$

(ii) *Die Summenregel:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) + g(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$.

Beweis: Benutze die Definition. ■

Bemerkung. Mit 2. und obiger Regel für $f(x) = ax^n$ lassen sich jetzt alle Ableitungen von Polynomen bestimmen (beispielsweise $p'(x)$ von $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$)

Satz 3.14.

(i) *Die Produktregel:* $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(ii) *Die Quotientenregel:* $[1/g(x)]' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ *und allgemeiner* $[f(x)/g(x)]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Beweis:

(i) Benutze den Trick

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}
\end{aligned}$$

(ii) Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von g ein ganzes Intervall von x_0, in dem $g(x) \neq 0$. Sei $x + h$ in diesem Intervall. Dann folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

Der allgemeine Fall folgt mit (i).

■

Bemerkung. Durch diesen Regeln können wir, indem wir allein die Ableitungsregeln $f' = 0$ für $f \equiv c$ und $f' = 1$ für $f(x) = x$ kennen, alle rationale Polynomen ableiten.

Satz 3.15 (Kettenregel). *Sei $f(x)$ bei x_0 differenzierbar, $g(y)$ bei $y = f(x_0)$. Dann ist $h := g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f^{(}x_0)$.*

Beweis: Man muss sich dies so vorstellen: $f(x)$ verhält sich nahe bei x_0 wie Multiplikation mit dem Wert $m = f'(x_0)$ und $g(x)$ verhält sich nahe bei $f(x_0)$ wie Multiplikation mit dem Wert $n = g'(f(x_0))$. Also verhält sich die Hintereinanderschaltung nahe bei x_0 wie die Hintereinanderschaltung der Multiplikationen $x \mapsto mx_0 \mapsto (nm) \cdot x_0$, nämlich $nm = g'(f(x_0)) \cdot f^{(}x_0) = (g \circ f)'(x_0)$. ■

Korollar 3.16 (Umkehrregel). *Ist f differenzierbar und umkehrbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar und es gilt $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

Beweis: Wir zeigen nur, dass die Formel gelten muss (und nicht dass f^{-1} überhaupt differenzierbar ist). Da $f'(x) = 1$ für $f(x) = x$ gilt $(f \circ f^{-1})' = 1$. Mit der Kettenregel folgt

$$1 = (f \circ f^{-1})' = (f' \circ f^{-1}) \cdot (f^{-1})'.$$

Da $f'(x) \neq 0$, also $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$. ■

Exempel 3.17.

(i) Sei $f(x) = e^x$. Wir bemerken, dass $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle x. Dann gilt also für die Umkehrfunktion $\ln x$ zu $f(x) = e^x$, dass $\ln'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = 1/x$.

(ii) Für allgemeine Potenzen $r \in \mathbb{R}$ ist x^r durch $x^r := e^{r \ln x}$ definiert. Dann gilt mit der Kettenregel, dass $f'(x) = e^{r \ln x} \cdot r/x = rx^{r-1}$. Also auch allgemein $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$.

3.3 Wichtige Sätze für differenzierbare Funktionen

Definition 3.18. Die Funktion $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{W}$ besitzt an der Stelle x_0 ein **lokal Maximum bzw. Minimum**, falls es ein offenes Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathrm{D}$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x in diesem Intervall.

Satz 3.19 (Satz von Fermat). *Sei $f\colon]a,b[\to \mathrm{W}$ und in x_0 differenzierbar. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum oder Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$. (Bild!)*

Beweis: Es gilt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ für $h > 0$ und $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ für $h > 0$. Wegen Differenzierbarkeit gilt also $0 \leq f'(x_0) \leq 0$. ∎

Satz 3.20 (Der Mittelwertsatz). *Sei $f\colon [a,b] \to \mathrm{W}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \text{Bild [FF, 8.5.2]}$$

Beweis: Wir zeigen, dass falls $f(a) = f(b)$, ein ξ existiert mit $f'(\xi) = 0$ (Allgemeine Formulierung Übungsaufgabe).

1. Fall: Ist f konstant, so $f' \equiv 0$.

2. Fall: Es ex. x mit $f(x) \neq f(a)$. In jedem Fall gibt es ein Maximum M und Minimum m von f. Eins von beiden muss von $f(a) = f(b)$ verschieden sein. Daher existiert ein ξ mit $f(\xi) = \mathrm{M}$ oder $f(\xi) = m$. Dies ξ kann nicht am Rand auftreten, ist daher relatives Minimum oder Maximum. Nach dem Satz von Fermat $f'(\xi) = 0$. ∎

Satz 3.21. *Für die in $[a,b]$ stetigen und (a,b) differenzierbaren Funktionen f und g gelte $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Dann unterscheiden sich f und g nur durch eine Konstante, das heißt es gilt für alle $x \in [a,b]$, dass $f(x) - g(x) = c$.*

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass $f' = 0$ nur dann, wenn $f \equiv c$. Dann wende dies auf $h := f - g$ an. ∎

3.4 Mehrfache Ableitungen

Exempel 3.22. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 3x^2$ ebenso. Die Ableitung von f' nennt man die **zweite Ableitung von** f, sagt, f **sei auf** $\mathbb{R}$ **zweimal differenzierbar**, und schreibt f''. Hier $f'' = 6x$. Dies kann man so fortsetzen, beispielsweise $f''' \equiv 6$.

Definition 3.23. Die höheren Ableitungen einer Funktion f werden rekursiv definiert durch $f^{(n)} = f^{(n-1)}$. Dann heißt $f^{(n)}$ die n**-te Ableitung** von f.

Bemerkung 3.24. Eine andere Schreibweise ist $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f$. Für $n = 1,2,3$ schreibt man auch f', f'' oder f'''.

Exempel 3.25.

(i) Hat ein Polynom $p(x)$ an x_0 eine zweifache Nullstelle, dann $p(x) = (x-x_0)^2 q(x)$ und es gilt $p'(x_0) = 0$ und $p''(x_0) \neq 0$. Allgemeiner für eine k-fache Nullstelle, dass $f^{(1)}(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

(ii) Für $f(x) = 1/2x|x|$ ist $f'' = x/|x|$ nicht in 0 definiert und damit dort nicht differenzierbar. Aber f ist differenzierbar mit $f'(x) = |x|$, da $|x|' = \frac{|x|}{x}$.

(iii) Ein Anwendungsbeispiel: Sei $s(t)$ die Wegfunktion, dann ist $s'(t_0)$ die Momentangeschwindigkeit und deren Ableitung s'' die momentane Veränderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, [P, S.362].

Übung 3

(i) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen durch Anwendung der Def. 3.3:

(a) $f(x) = ax$.

(b) $f(x) = ax^3$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x)x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist (obwohl stetig, wie wir gesehen haben!). Hinweis: Zeigen Sie, dass $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ nicht existiert, indem Sie zwei Nullfolgen (a_n) und (b_n) konstruieren, die eingesetzt in diesen Differenzquotienten zwei unterschiedliche Grenzwerte g ergeben. Dann folgt das Ergebnis aus folgendem

Satz 3.26. *Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert g genau dann, wenn für jede Folge (a_n) mit $\lim a_n = x_0$ gilt:*

$$\lim f(a_n) = g.$$

(iii) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = 3x^4$ die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 4$ sowie an einer beliebigen Stelle x_0.

(iv) An welchen Stellen sind folgende Funktionen stetig, an welchen differenzierbar? Skizziere hierzu den Graph dieser Funktionen. Gib die Ableitung $f'(x)$ an.

(a) $f(x) = |x^2 + x|$

(b) $f(x) = \text{signum}(x) \cdot x^2$

(c) $f(x) = -x + \sqrt{(x-2)^2}$

Hinweis: Unterteilen Sie den Definitionsbereich in offene Intervalle, in denen Sie die angegebenen Funktionen auf Funktionen zurück führen können, deren Ableitungen bekannt sind. Anschließend untersuchen Sie die Übergangsstellen und bilden dort jeweils links- und rechtsseitige Grenzwerte und verwenden Satz 3.26.

(v) Bilde von folgenden Funktionen die erste Ableitung:

(a) $y = x^3/3 - 2x^2 + 4x - 5^7$

(b) $y = \frac{5x^2 - 3\sqrt{x} + 3x^3\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt[3]{x^2}}$

(c) $y = \sqrt{x\sqrt{3x\sqrt{2x}}}$

(d) $y = \ln|x|$

(e) $\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

(f) $y = \ln|\ln x|$

(vi) Bilde von folgenden Funktionen die ersten vier Ableitungen:

(a) $y = \sin x$

(b) $y = \ln x$

(c) $y = \sqrt{x+1}$

(d) $y = \cos 3x$

(vii) (a) Ein Körper bewege sich auf der x-Achse nach den Gesetz $x(t) = t^3/3 - 2t^2 + 3t$. Bestimme Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegegung. Wann ändert der Körper die Bewegungsrichtung?

(b) Ein Körper wir aus einer Höhe von 10 Metern über den Boden vertikal nach oben geschleudert. Dabei erhält er eine Anfangsgeschwindigkeit von $20m/s$. Welche Höhe über dem Boden hat er nach der Zeit t erreicht? Bestimme Geschwindigkeit und Beschleunigung dieser Bewegung. Nach wievielen Sekunden hat der Körper seinen höchsten Punkt erreicht und in welcher Höhe über dem Boden befindet er sich dann?

(c) Die Schwingung eines Massepunkts um seine Ruhelage wird durch das Gesetz $x = \mathrm{A}\cos\omega t$ beschrieben. Bestimme Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung für $x = \pm\mathrm{A}$ und $x = 0$. Zeige, dass die Beschleunigung und die Auslenkung x durch die Differenzialgleichung $\ddot{x} := x(t)'' = -\omega^2 x$ zusammenhängen.

Lösungen

(v) (b) $y = 5/2x^{4/3} - 3/2x^{-1/6} + 3/2x^{31/12}, \implies y' = \cdots$

(c) $y = \sqrt[4]{3\sqrt[2]{2}}x^{7/8}, \implies y' = \cdots$

(d) $y' = 1/x$ für $x \neq 0$

(f) $y = \begin{cases} \ln(-\ln x) & ,0 < x < 1 \\ \ln(\ln x) & ,x > 1 \end{cases}, \implies y' = \frac{1}{x \ln x}$

(vi) (c) $y^{(4)} = \frac{-15}{16\sqrt{(x+1)^7}}$

4 Taylor-Approximation und Potenzreihen

4.1 Reihen

Definition und Beispiele.

Exempel 4.1. Sei $a_n = 0{,}2^n$ für $n \geq 0$, siehe [P, VI.1].

Definition 4.2. Gegeben eine Folge $(a_n) = (a_0, a_1, \ldots)$. Dann definiere die Folge der Partialsummen (s_n) durch $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1$ und so fort. Dann heißt die Folge der Partialsummen (s_n) einer unendlichen Zahlenfolge (a_n) **unendliche Reihe**. Wir schreiben für diese Folge symbolisch

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + \cdots .$$

Exempel 4.3. Siehe [P, VI.1.2]

(i) Die **harmonische Reihe** durch $a_n = 1/n$.

(ii) Die geometrische Reihe durch $a_n = aq^n$.

Definition 4.4. Eine unendliche Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen (s_n) einen Grenzwert s besitzt. Wir schreiben symbolisch

$$\sum_{n\geq 0} a_n = s.$$

Besitzt die Partialsummenfolge (s_n) jedoch keinen Grenzwert, so heißt die unendliche Reihe **divergent**.

Bemerkung 4.5.

(i) Ist $s = \pm\infty$, so nennt man die unendliche Reihe auch **bestimmt divergent**.

(ii) Eine unendliche Reihe heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ konvergiert. Eine absolute konvergente Reihe ist stets konvergent, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Zum Beispiel gilt, ohne Beweis, dass $1-1/2+1/3+\cdots = \ln 2$, aber $\sum_{n\geq 0} 1/n = \infty$, da wir Summe der Glieder $a_{2^n+1}, a_{2^n+1}, \ldots, a^{2^{n+1}}$ nach unten durch $2^n \cdot 2^{n+1} = 1/2$ abschätzen können.

(iii) Die allgemeinen Rechenregeln für endliche Summen gelten nur für absolut konvergente Reihen.

Exempel 4.6. [P, Bsp. VI.1.2.1] Die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$ konvergiert für $q < 1$ mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}$. Für $q \geq 1$ gilt jedoch $\sum_{n=0}^{N} q^n \geq N$ und daher $\sum_{n\geq 0} q^n = \infty$.

Konvergenzkriterien. Nach Definition gilt $\sum_{n\geq 0} a_n = s$ für einen Grenzwert s genau dann, wenn $s_n \to s$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \geq 0$, sodass $|a_0 + \cdots + a_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere $|a_{n+1}| \leq |a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1} - s| + |s - a_0 + \cdots + a_n| \leq 2\varepsilon$. Also gilt $a_n \to 0$. Dies ist also ein notwendiges, aber **kein hinreichendes** Kriterium dafür, dass $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert. Ein Beispiel liefert $a_n = 1/n$.

Satz 4.7 (Majorantenkriterium). *Sei $\sum_{n\geq 0} a_n$ eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern. Sei $\sum_{n\geq 0} b_n$ eine Vergleichsreihe, die konvergiere und gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 0$. Dann konvergiert auch $\sum_{n\geq 0} a_n$.*

Bemerkung 4.8. Bei Satz 4.7 reicht es auch, dass $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ ab einem gewissen $n_0 \geq 0$.

Exempel 4.9. [P, Bsp VI 1.3.3] Die unendliche Reihe $\sum_{n\geq 1} 1/n!$ konvergiert, da beschränkt durch die konvergente Vergleichsreihe $\sum_{n\geq 0} 1/2^n$. Dies ist nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n$ für $q = 1/2 < 1$.

Satz 4.10 (Quotientenkriterium). *Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ die Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q < 1,$$

so ist die Reihe konvergent. Ist $q > 1$, so ist die Reihe divergent. Ist $q = 1$, so ist beides möglich.

Beweis: Folgt aus dem Majorantenkriterium, da $\sum_{n\geq 0} a_n$ ab einem $n_0 \geq 0$ durch die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} a\tilde{q}^n$ für ein $q < \tilde{q} < 1$ beschränkt ist. ■

Exempel 4.11. Die unendliche Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ für $a_n = 1/n!$ konvergiert, da $a_{n+1}/a_n = n + 1$ und somit $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0 < 1$.

4.2 Potenzreihen

Definition 4.12. Unter einer **Potenzreihe** versteht man eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + \cdots .$$

Diese Stelle x_0 heißt **Entwicklungspunkt** und die reellen Zahlen $a_0,a_1,\ldots$ sind die **Koeffizienten der Potenzreihe**.

Exempel 4.13.

(i) $P(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$.

(ii) $P(x) = \sum_{n\geq 0} x^n/n! = 1 + x + x^2/2! + \cdots$.

(iii) $P(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}(x - 1)^n/n = \frac{x-1}{n} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$

Satz 4.14 (Definition und Satz). *Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ gibt es ein $r \geq 0$, der **Konvergenzradius**, mit den Eigenschaften*

(i) *Die Potenzreihe konvergiert überall auf $]x_0 - r,x_0 + r[$.*

(ii) *Die Potenzreihe divergiert dagegen für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$.*

Beachte jedoch: Falls $|x - x_0| = r$, so ist abhängig von der Potenzreihe beides möglich.

Bemerkung 4.15. Für $x = 0$ ist stets $P(0) = a_0$. Es gibt Potenzreihen, die nur für $x = 0$ konvergieren — zum Beispiel $P(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^n$, und solche die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Satz 4.16. *Der Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ lässt sich nach der Formel*

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

berechnen.

Beweis: Schreibe $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n\geq 0} b_n$ für $b_n := a_n(x - x_0)^n$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0} b_n$, falls

$$\lim_{n\to\infty} |b_{n+1}/b_n| = |x - x_0| \cdot |a_{n+1}/a_n| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$$

und divergiert, falls dieser Term kleiner 1 ist. Dies gilt genau dann, wenn $|x - x_0| < r$ bzw. $|x - x_0| > r$. ∎

Exempel 4.17. [P, Bsp. IV.2.2]

(i) Die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} x^n$ hat Konvergenzradius $r = 1$.

(ii) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ hat Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$

4.3 Taylor-Polynome

Die Tangente ist eine lineare (das heißt Multiplikation mit einem Skalar) Approximation von f am Punkt x_0, umso besser je näher x bei x_0 (Bild!). Ziel: Approximation von f durch

(i) Eine lineare Funktion (= Polynom ersten Grades),

(ii) Polynom zweiten Grades,

(iii) Polynom dritten Grades.

Bestimmung der Koeffizienten $a_0,\ldots,a_N$ durch Gleichsetzen der Ableitungen von f und P_N im Punkt x_0 (Dann haben wir Funktionen, deren Ableitungen sogar nahe beieinander). Dann ist beispielsweise $P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ die Tangente in x_0. Weiter $P_2(x_0) = 2 \cdot a_2 = f^{(2)}(x_0)$ und allgemein $P_N(x_0) = n!a_N = f^{(N)}(x_0)$ (Bild Schmiegepolynome von e^x).

Definition 4.18. Gegeben ist eine Funktion f, die an der Stelle x_0 mindestens N mal differenzierbar ist. Dann heißt

$$P_N(x) = \sum_{n=0,\ldots,N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das N-**te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt** x_0.

4.4 Taylorreihe

Definition 4.19. Die Reihe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt die **Taylorreihe** von $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0.

Bemerkung 4.20.

(i) Der Konvergenzradius r der Taylorschen Reihe lässt sich durch die Formel in Satz 4.7 bestimmen.

(ii) Es kann sein, dass die Taylorreihe einem positiven Konvergenzradius hat, dort aber nicht mit der Funktion übereinstimmt! Ein solches Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Bei den Funktionen, die wir betrachten werden, konvergiert die Taylorreihe aber stets gegen den Funktionswert.

Exempel 4.21.

(i) Für $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ erhalten wir $f^{(n)}(0) = 1$ und daher

$$e^x = \sum_{n \geq 0} x^n / n!.$$

(ii) Für $f(x) = \ln(1+x)$ in $x_0 = 0$ erhalten wir $f(0) = 0$ sowie $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ (siehe [P, Bsp. VI.3.2.2]) und daher

$$\ln(x+1) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} / n x^n.$$

Satz 4.22. *Ableitung von Potenzreihen Sei $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \geq 0$. Dann ist $f(x)$ auf $]x_0 - r, x_0 + r[$ differenzierbar und kann dort durch die Potenzreihe*

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} a_n n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

mit demselben Konvergenzradius r dargestellt werden.

Exempel 4.23. Wenn wir $\sum_{n \geq 0} x^n / n!$ ableiten, erhalten wir

$$\sum_{n \geq 1} x^{n-1} / (n-1)! = \sum_{n \geq 0} x^n / n!.$$

Übung 4

(i) (a) Entwickle $f(x) = 3 + 11x - 9x^2 + 2x^3$ unter Verwendung der Taylorformel nach Potenzen von $(x - 2)$.

(b) Entwickle das Taylorpolynom von $f(x)$ an der Stelle x_0 bis zum n-ten Glied einschliesslich.

(i) $f(x) = e^{2x-x^2}$ bei $x_0 = 0$ für $n = 3$.

(ii) $f(x) = x^x - 1$ bei $x_0 = 1$ für $n = 3$.

(iii) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ für $x_0 = 0$ und $n = 4$.

(ii) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?

(iii) Bestimmen Sie die Taylorreihen von $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie so, dass $\sin' x = \cos x$.

(iv) Untersuche mit Hilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz folgender Reihen

(a) $2 + 2^2/2^{15} + 2^3/3^{15} + 2^4/4^{15} + \cdots$

(b) $2/3 + 4/9 + 6/27 + 8/81 + \cdots$

(c) $1 + 2/2! + 4/3! + 8/4! + 16/5! + \cdots$

(d) $\sum_{k\geq 1} \frac{2k^2}{(k+1)\cdot 3^k}$

(e) $1^2/2! + 2^3/3! + 3^4/4! + 4^5/5! + \cdots$

(v) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $1/2 + 2/5 + 3/8 + 4/11 + \cdots$

(b) $\frac{\sin\alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \cdots$

(c) $\frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+2^4} + \frac{1}{1+2^6} + \frac{1}{1+2^8} + \cdots$

Hinweis zu (c): Vergleich mit geeigneter geometrischer Reihe.

Lösungen

(i) (a) $f(x) = 5 - (x-2) + 3(x-2)^2 + 2(x-3)^2$

(b) (1) $f(x) = 1 + 2x + x^2 - 2/3x^3$

(2) $f(x) = (x-1) + (x-1)^2 + 1/2(x-1)^3$

(3) $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$

(ii) $f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ und $r = 1$.

(iii) $\sin x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot x^{2n+1}/(2n+1)!$ und $\cos x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}/(2n!)$, damit folgt $\sin' x = \cos x$ mit dem Satz über die Ableitung von Potenzreihen.

(iv) (a) divergent

(b) konvergent

(c) konvergent

(d) konvergent

(e) divergent

(v) (a) divergiert, da $a_n \to 1/3 \neq 0$.

(b) konvergiert, da gliedweise beschränkt durch die Vergleichsreihe $\sum_{n\geq 1} b_n$ mit $b_n = (1/n^2)$ - kam leider nicht in der Vorlesung dran.

(c) konvergiert, da gliedweise beschränkt durch die Vergleichsreihe $\sum_{n\geq 1} b_n$ mit $b_n = (1/2)^n$, die geometrische Reihe für $q = 1/2$ (und Startindex $n = 1$).

5 Untersuchung von Funktionsgrafen

5.1 Monotonie

Noch einmal zur Erinnerung: Der wichtige

Satz (Mittelwertsatz). *Sei* $f : [a,b] \to \mathrm{W}$ *stetig und auf* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann existiert ein* $\xi \in]a,b[$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \text{Bild [FF, 8.5.2]}$$

Die 1. Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Kurventangente an ([P, Bild 3.3.1]). Dadurch ergibt sich der folgende

Satz 5.1. *Die Funktion* f *sei im Intervall* I *differenzierbar, dann gilt*

(i) $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathrm{I}$ $\iff$ f *ist in* I *monoton steigend.*

(ii) $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in \mathrm{I}$ $\iff$ f *ist in* I *monoton fallend*

Beweis: " $\Longrightarrow$ ": Für beliebige Punkte $x,y \in \mathrm{I}$ gibt es wegen des Mittelwertsatzes ein ξ zwischen x und y, sodass

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(\xi).$$

" $\Longleftarrow$ ": Benutze die Definition des Grenzwerts in einem Punkt. ∎

Satz 5.2. *Die Funktion* f *sei im Intervall* I *differenzierbar, dann gilt*

(i) $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathrm{I}$ $\Longrightarrow$ f *ist in* I *streng monoton steigend.*

(ii) $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in \mathrm{I}$ $\Longrightarrow$ f *ist in* I *streng monoton fallend*

Beweis: Umständlich und direkt: Sei $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$. Dann gibt es nach Definition ein $\delta > 0$, sodass $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$, falls $|h| \leq \delta$. Daher $f(y) > f(x)$ für $y \in [x,x+\delta]$. Da dies für alle $x \in \mathrm{I}$ gilt, etwa $\tilde{x} = x+\delta$, muss $f(y) > f(x)$ für alle $x \in \mathrm{I}$.
Mit dem Mittelwertsatz: Für beliebige Punkte $x,y \in \mathrm{I}$ gibt es ein ξ zwischen x und y, sodass

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi).$$

■

Bemerkung 5.3. Satz 5.1 formuliert eine "Äquivalenz", dagegen Satz 5.2 eine Implikation (Folgerung). Wir sagen, dass die Bedingung $f'(x) \geq 0$ oder $f'(x) \leq 0$ **hinreichend und notwendig** für die Monotonie von f ist, dagegen die Bedingung $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ nur **hinreichend** für die strenge Monotonie von f.
Dass Satz 5.2 nur eine hinreichende Bedingung liefert, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, es gilt aber $f'(0) = 0$.

Exempel 5.4. Sei $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Da $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 3((x + 1/3)^2 + 2/9) > 0$ für alle $x \in \mathrm{R}$, ist f streng monoton wachsend.

5.2 Lokale Extrema

Zur Erinnerung:

Definition. [P, Bild 3.4.1] Die Funktion $f : \mathrm{D} \to \mathrm{W}$ besitzt an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum bzw. Minimum**, falls es ein offenes Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathrm{D}$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x in diesem Intervall.

Bemerkung 5.5.

(i) Wir fassen Maxima und Minima unter dem Sammelbegriff **Extrema** zusammen.

(ii) Die Kurvenpunkte $(x,f(x))$ zu einem Maximum oder Minimum x werden auch **Hoch**- oder **Tiefpunkte** genannt.

(iii) Eine Funktion kann durchaus mehrere lokale Maxima und Minima besitzen. So hat $y = \sin x$ unendlich viele lokale Maxima und Minima an den Stellen $\pi(1/2 + 2k)$ und $\pi(3/2 + 2k)$ mit den Funktionswerten 1 und -1 ([P, Bild IV-36]).

Bei einer differenzierbaren Funktion verläuft die Tangente in einem Extremum stets waagerecht. Dies gilt, da die Steigung vor x_0 positiv, nach x_0 negativ ist. Wegen der Stetigkeit der Ableitung muss sie daher in x_0 verschwinden. Daher erhielten wir den

Satz (Satz von Fermat). *Sei $f :]a,b[\to W$ und in x_0 differenzierbar. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum oder Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$. (Bild!)*

Beweis: Es gilt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ für $h > 0$ und $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ für $h > 0$. Wegen Differenzierbarkeit gilt also $0 \leq f'(x_0) \leq 0$. ■

Bemerkung 5.6. Dies ist aber keineswegs hinreichend: Zum Beispiel hat die Funktion $f(x) = x^3$ in 0 kein lokales Extremum, aber $f'(0) = 0$. Es handelt sich um einen **Sattelpunkt** (Bild). Dies meint, dass die Steigung an diesem Punkt ihre Richtung von unten nach oben nicht ändert (oder von oben nach unten). Dies schlissen wir nun aus.

Satz 5.7 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum). *Eine (mindestens) zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 einen lokales Extremum, wenn die Bedingungen*

$$f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) \neq 0$$

erfüllt sind. Für $f''(x_0) > 0$ liegt dann ein lokales Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.

Exempel 5.8.

(i) Die Parabel $f(x) = x^2$ besitzt bei $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, sogar ein **absolutes Minimum = kleinster Funktionswert im gesamten Definitionsbereich**.

(ii) Allgemeiner sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n mit einer doppelten Nullstelle. Dann besitzt $f(x)$ an dieser Stelle ein lokales Extremum ([P, Bsp. 3.4.1(4)]).

(iii) Für die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ inklusive Graphen siehe [P, Bsp. 3.4.1.(2)].

Es kann leider auch vorkommen, zum Beispiel bei der Funktion $f(x) = x^4$, dass die Funktion in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum hat, dort aber auch $f''(x_0) = 0$. Dann müssen wir auch die dritte Ableitung betrachten, um sicherzugehen, wirklich ein lokales Extremum erwischt zu haben. Allgemein führt folgendes Verfahren zum Erfolg:

Satz 5.9 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum, falls $f''(x) = 0$). *Sei $f(x)$ eine (mindestens) n-mal differenzierbare Funktion und gelte $f'(x_0) = 0$ an der Stelle x_0. Sei $f^{(n)}(x_0)$ für $n \geq 2$ die nächstfolgende nicht verschwindende Ableitung. Dann besitzt $f(x)$ an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, wenn n gerade ist und die Bedingung*

$$f^{(n)}(x) \neq 0$$

erfüllt ist. Für $f^{(n)}(x_0) > 0$ liegt dann ein lokales Minimum vor, für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.

Exempel 5.10. Siehe [P, 3.4.3] für die Beispiele x^4 und x^5.

Satz 5.11 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum falls x_0 Sprungstelle). *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, wenn f' dort sein Vorzeichen wechselt, das heißt es gibt ein $\delta > 0$, sodass $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ (oder andersrum erst $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und dann $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$). Dann gilt:*

(i) *Wechsel von — nach +: lokales Minimum*

(ii) *Wechsel von + nach -: lokales Maximum*

Hierzu muss f in einer ***punktierten Umgebung*** $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[- \{x_0\} =]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[$ *(Bild) differenzierbar sein.*

Bemerkung 5.12.

(i) Auch dies ist leider kein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Extremwertes, betrachte dazu

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin(\pi/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Dann hat $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein absolutes Minimum, aber das obige Kriterium sticht nicht, siehe [FF, Bsp. 8.74].

(ii) Dieses Kriterium bietet zwei Vorteile gegenüber den zwei Vorherigen:
  (i) Es ist oft allgemeiner anwendbar, da es Sprungstellen einschließt.
  (ii) Es ist weniger rechenaufwendig.

Exempel 5.13.

(i) Wir können nun zeigen, dass die Funktion $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ ein Minimum hat.

(ii) Wir berechnen die Extrema von $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ (Projektor). Diese hat Spitzen bei -1 und 1, unendliche Steigung, und ist daher dort nicht differenzierbar, besitzt dort aber Extrema, wie uns das letzte Kriterium zeigt.

Zusammenfassend gehen wir wie folgt vor:

(i) Wir bestimmen als notwendige Bedingung für **lokale** Extreme die Nullstellen $f'(x_0) = 0$ der ersten Ableitung

(ii) Wir bestimmen die Sprungstellen, das heißt, die Stellen x_0 an denen f nicht differenzierbar ist.

(iii) Mit den vorherigen Kriterien untersuchen wir die Funktion an diesen Stellen auf Extrema.

5.3 Krümmung und Wendestellen

Die 2. Ableitung $f''(x)$ ist die Ableitung der 1. Ableitung $f'(x)$. Daher gibt sie an, wie stark sich die Steigung entlang der x-Achse ändert. Steigt sie, so hat die Kurve Links-, fällt sie, so Rechtskrümmung. Mit dem Satz 5.1 halten wir fest

Bemerkung 5.14. [P, Bild 3.3.3]

(i) $f''(x) \geq 0, \iff$ Graph konvex (= Krümmung nach rechts)

(ii) $f''(x) \leq 0, \iff$ Graph konkav (= Krümmung nach links)

Exempel 5.15.

(i) Ist $f(x) = mx + b$ linear, so gilt $f''(x) = 0$. Dies bedeutet, dass die Funktion ihre Steigung nie ändert, sie bleibt immer konstant m.

(ii) Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist nach rechts gekrümmt. In der Tat $f''(x) = -1/x^2 < 0$ für alle $x > 0$.

Definition 5.16. Sie $f(x)$ eine 2-mal differenzierbare Funktion. Die Punkte, an denen sich der Drehsinn der Tangente ändert, heissen **Wendepunkte**. Wir definieren dies dadurch, dass f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.
Die speziellen Wendepunkt mit waagerechter Tangente nennen wir **Sattelpunkte**.

Da wir gesehen haben, dass die Krümmungsrichtung dem Vorzeichen der zweiten Ableitung entspricht, muss notwendigerweise in einem Wendepunkt $f''(x_0) = 0$ gelten. Ausserdem haben wir gesehen, dass wir notwendigerweise einen Vorzeichenwechsel von $g = f''$ in x_0 haben, falls $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$. Dies halten wir fest:

Satz 5.17.

(i) *Hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, so gilt $f''(x_0) = 0$ (**notwendige** Bedingung).*

(ii) *Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (falls f dreimal in x_0 differenzierbar) (**hinreichende** Bedingung).*

Bemerkung 5.18. Für den VZW muss f'' nicht im Wendepunkt x_0 definiert sein! So ist $f(x) = x|x|$ wegen $f'(x) = 2|x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, hat dort aber einen Vorzeichenwechsel.

Exempel 5.19.

(i) Bei den trigonometrischen Funktionen sind die Wendepunkte gerade die Nullstellen. Wir betrachten $f(x) = \sin x$ und beschränken uns auf das Periodenintervall $[0{,}2\pi[$. Dann gilt $f''(x) = -\sin x$ und $f'''(x) = -\cos x$ und wir erhalten als Wendestellen (keine Sattelstellen!) $x_1 = 0, x_2 = \pi$, siehe [P, Bsp 3.4.2. (1)].

(ii) Die Funktion $f(x) = -2/3x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ einen **Sattelpunkt**, siehe [P, Bsp. 3.4.2. (2)].

5.4 Kurvendiskussion

Ziel: Zeichnen des Funktionsgrafen, indem möglichst viele Eigenschaften der Funktion das Verhalten dieser vollständig erfassen.

(i) Definitionsbereich, ggf. Analyse von Lücken im Definitionsbereich (Behebbare Lücke, Sprung, Polstelle mit/ohne Vorzeichenwechsel)

(i)' Gegebenenfalls kann eine Analyse der Symmetrie-, Periodizitäts- und Monotonie-Eigenschaften nützen.

(ii) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

(iii) Lokale Extrema

(iv) Wendepunkte und Tangenten in diesen

(v) Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b} f(x),$$

wobei $\mathrm{D} =]a,b[$ mit $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(vi) Wertebereich der Funktion

Einige kurze Bemerkungen zur Vorgehensweise:

(i) Siehe hierzu die Definition 2.7 und den Abschnitt 2.4.

(ii) Betrachte hier die Nullstellen und Funktionswert in 0.

(iii) Wende hierzu die Kriterien aus Abschnitt 5.2 an.

(iv) Wende hierzu die Kriterien aus Abschnitt 5.3 an.

(v) Betrachte hierzu Definition 2.1 und Definition 2.4, falls a oder b unendlich, sonst Definition 2.7.

(vi) Hier kann eine Analyse der Extrema helfen.

Übung 5

(i) Bestimme für diese Funktionen den maximalen Definitionsbereich, die lokalen Extrema und die Intervalle auf denen sie streng monoton wachsen oder fallen.

(a) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4}$

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(ii) Auf welchen Intervallen sind folgende Funktionen streng konvex oder streng konkav?

(a) $f(x) = x^3$.

(b) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ für $x \neq -1{,}1$.

(iii) Bestimme den größten und kleinsten Wert folgender Funktionen in ihrem Definitionsbereich.

(a) $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$ mit $\mathrm{D} = [0{,}10]$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ mit $\mathrm{D} = [-3/2{,}5/2]$

(iv) Führe für diese Funktionen eine Kurvendiskussion durch und skizziere diese:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$

(b) $f(x) = \frac{x^2+x+14}{x+2}$

(c) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = xe^x$

(v) Eine an ein Haus angrenzende rechteckige Fläche von möglichst großem Inhalt soll durch einen Zaun mit einer Länge von 120 m eingezäunt werden. Bestimme die Maße dieser.

(vi) Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts betrage 18 m. Für welchen Halbkreisradius wird der Flächeninhalt des Querschnitts am größten?

(vii) Zwei Korridore der Breite 2,4 m und 1,6 m schneiden einander rechtwinklig. Bestimme die größte Länge einer Leiter, die man horizontal aus dem einen Korridor in den andren tragen kann.

(viii) Ein Bild wird an die Wand gehängt. Sein unterer Rand ist um die Länge b, sein oberer um a höher als das Auge des Betrachters über den Boden, also $a > b$. In welcher Entfernung von der Wand muss der Betrachter stehen, um das Bild unter möglichst großem Winkel sehen zu können?

(ix) Wie muss man $n = 48$ gleichartige Elemente, jedes mit einem inneren Widerstand von $\mathrm{R}_i = 0{,}25\Omega$, zu einer Batterie vereinigen, damit der Aussenwiderstand von $\mathrm{R}_a = 3\Omega$ eine maximale Leistung aufnehmen kann? Hinweis: Die Batterie bestehe aus y parallelgeschalteten Gruppen von je x hintereinandergeschalteten Elementen.

Lösungen

(i)

(a) $D = \mathbb{R} - \{0\}, x_{\max} = -1{,}1$, streng monoton wachsend auf $]-\infty,-1[\cup]0{,}1[$, streng monoton fallend auf $]-1{,}0[\cup]1{,}\infty[$.

(b) $D = [-1{,}1]$, $x_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{\max} = \sqrt{2}2$, streng monoton fallend auf $]-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2},1[$, streng monoton wachsend auf $]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}[$.

(ii)

(a) Auf $]0{,}\infty[$ streng konvex, auf $]-\infty{,}0[$ streng konkav.

(b) Auf $]-\infty,-1[\cup]0{,}1[$ streng konvex, auf $]-1{,}0[\cup]1{,}\infty[$ streng konkav.

(iii)

(a) $f(5) = 4, f(0) = f(10) = 0$

(b) $f(5/2) = 111/8, f(1) = 1$

(iv)

(a) $D = W = \mathbb{R}, x_N = 0{,}3, x_{\max} = 0, x_{\min} = 2, x_W = 1, t_W(x) = -6x + 2, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(b) $D =]-\infty,-2]\cup]-2,\infty[, W =]-\infty,-11] \cup [5,\infty[$, keine Nulstellen, Asymptote $A(x) = x - 1, x_P = -2, x_{\max} = -6, x_{\min} = 2$, keine Wendepunkte.

(c) $D =]0,\infty[$, $W =]0{,}2]$, keine Nullstellen, keine Polstellen, $x_{\max} = 0, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $x_W = \pm 1$, $t_W(x) = \pm 3/4x + 2{,}25$.

(d) $D = \mathbb{R}$, $W = [-1/e,\infty[$, $x_N = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, x_{\min} = -1, x_W = -2, t_W(x) = -e^{-2}x - 4e^{-2}$.

(v) $30 \cdot 60$ Quadratmeter

(vi) $\frac{18}{4+\pi}$ Meter

(vii) Ca. 5,619 Meter

(viii) $\sqrt{ab}$

(ix) Zwei Gruppen mit 24 Elementen.

6 Integralrechnung

6.1 Das bestimmte und bestimmte Integral

Exempel 6.1.

(i) Wir berechnen die Unter- und Obersumme der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[1,2]$ für $n = 5$ Streifen, siehe [P, Bsp V.2.1].

(ii) Eine Tabelle für $n = 5,10,\ldots,1000$, siehe [P, Ende V.2.1], zeigt die schrittweise Annäherung an den eigentlichen Flächeninhalt.

(iii) Allgemein erhalten wir für die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ die Untersumme $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0,\ldots,n-1} f(x_k)\Delta x_k$ und Obersumme $\mathrm{O}_n = \sum_{k=1,\ldots,n} f(x_k)\Delta x_k$. Dann steigt U_n und fällt O_n für $n \to \infty$ monoton. Hat die Funktion nur endlich viele Sprungstellen (= Unstetigkeitsstellen) - wir sagen f ist **stückweise stetig**, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{O}_n$ und wir definieren dies als $\int_a^b f(x)$ (historisch ist das kantigere Summenzeichen Σ dem weicheren Integralzeichen $\int$ gewichen).

Definition 6.2. Hat die Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $[a,b]$ nur endliche viele Sprungstellen, so existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \mathrm{U}_n \quad \text{mit} \quad \mathrm{U}_n = \sum_{k=0,\ldots,n-1} f(t_k)\Delta t_k$$

und wir bezeichnen diesen das **(bestimmte) Integral der Funktion** $f(t)$ **in den Grenzen** a **und** b. Betrachten wir die obere Grenze $b = x$ als Variable, so spricht man vom **unbestimmten Integral** $\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, eine Funktion in x, die den Flächeninhalt zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a,x]$ misst.

6.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz 6.3. *Jedes unbestimmte Integral* $\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *der stetigen Funktion ist eine* ***Stammfunktion*** *von* $f(x)$*, das heißt*

$$\mathrm{I}'(x) = f(x).$$

Beweis: Es gilt $\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Wir können den Flächeninhalt $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ durch $hf(t_{\min})$ nach unten, durch $hf(t_{\max})$ nach oben abschätzen; hierbei seien $t_{\min}$ und $t_{\max}$ das Minimum und Maximum von $f(t)$ auf dem Intervall $[x,x+h]$. Dann gilt wegen des Zwischenwertsatzes

$$\frac{\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(t_0) \quad \text{für ein } t_0 \in [x,x+h].$$

Daraus folgt

$$\mathrm{I}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{I}(x+h) - \mathrm{I}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(t_0) = f(x),$$

da $x \le t_0 \le x+h$ und $h \to 0$. ∎

Bemerkung 6.4.

(i) Die Funktion $\mathrm{I}(x)$ ist wegen $\mathrm{I}'(x) = f(x)$ stetig differenzierbar.

(ii) Jedes unbestimmte Integral $\mathrm{I}(x)$ der Funktion $f(x)$ lasst sich

$$\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}_0$$

schreiben, wobei F **irgendeine** Stammfunktion ist und C_0 eine geeignete Konstante ist, der Wert von a abhängt. Beweis: Wegen des Mittelwertsatzes gilt $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x), \implies \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C}$ für eine Konstante C.

Definition 6.5. Wir bezeichnen jede Stammfunktion $\mathrm{F}(x)$ der Funktion $f(x)$ mit $\int f(x)\,dx$ (Diese sind wieder bis auf eine Konstante C alle gleich).

Exempel 6.6.

(i) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(ii) $\int e^x \, dx = e^x + C$

(iii) $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Satz 6.7. *Sei* F *eine Stammfunktion der auf* $[a,b]$ *stückweise stetigen Funktion* $f(x)$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Wir haben oben bemerkt, dass $\int_a^x f(x) \, dx = F(x) + C_0$ für eine Konstante C_0. Genauer ist $C_0 + F(a) = \int_a^a f(x) \, dx = 0$, also $C_0 = -F(a)$. Also ist nach dem Hauptsatz

$$\int_a^b f(x) = F(b) + C_0 = F(b) - F(a).$$

■

Exempel 6.8. Wir berechnen $\int_1^2 1/x \, dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

6.3 Berechnung von Stammfunktionen

Satz 6.9. *Linearität Seien* $f(x), g(x)$ *stückweise stetig.*

(i) *Es gilt* $c \int f(x) \, dx = \int c f(x) \, dx$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

(ii) *Es gilt* $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

Exempel 6.10. Damit folgt $\int x^2 + 2 \sin x \, dx = \int x^2 \, dx + 2 \int \sin x \, dx = 1/3x^3 - 2 \cos x + C$.

Partielle Integration.

Satz 6.11 (Partielle Integration oder umgekehrte Produktregel). *Sind die Funktionen* f, g *(stückweise) stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx.$$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{H}(x) := f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ eine Stammfunktion von $h(x) = f'(x)g(x)$ ist. Wir berechnen

$$\mathrm{H}'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x) = h(x).$$

■

Diese Regel hilft also bei der Berechnung von $h(x) = \tilde{f}(x)g(x)$, wenn wir

(i) die Stammfunktion $f(x)$ von $\tilde{f}(x) = f'(x)$ leicht berechnen können, etwa $\tilde{f}(x) = e^x$,

(ii) die Stammfunktion
$$\int f(x)g'(x)\,dx$$
leichter zu berechnen ist als $\int f'(x)g(x)\,dx$, zum Beispiel da $g(x)$ eine lineare Funktion war und dadurch $g'(x) = c$ für eine Konstante c.

Exempel 6.12.

(i) Wir bestimmen $\int x \sin x\,dx$. Wir setzen $f'(x) = \sin x$ und $g(x) = x$. Dann gilt
$$\int x \sin x\,dx = -\cos x \cdot x - \int -\cos x = -\cos x \cdot x + \sin x + \mathrm{C}.$$

(ii) Wir bestimmen $\int x^2 e^x\,dx$. Wir setzen hierzu $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x^2$. Dann gilt
$$\int x^2 e^x\,dx = e^x x^2 - \int e^x 2x\,dx = e^x x^2 - 2\int e^x x\,dx.$$
Jetzt wenden wir erneute partielle Integration auf $\int e^x x\,dx$ mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$ an und erhalten
$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x = e^x(x-1).$$
Also ergibt sich
$$\int x^2 e^x\,dx = e^x x^2 - 2e^x(x-1) = e^x(x^2 - 2x + 2).$$

Wir sind in folgender Situation: Wir haben die Stammfunktion einer Funktion vom Typ $\tilde{f}(x) = f(u(x)) \cdot v(x)$ zu bestimmen. Können wir $v(x) = c \cdot u'(x)$ bis auf eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ zeigen, so ergibt sich die Stammfunktion von $\tilde{f}(x) = c \cdot f(u(x))u'(x)$, wie folgt: Erst die Stammfunktion F von f bestimmen. Dann ist die Stammfunktion von $\tilde{f}$ gegeben durch $\tilde{\mathrm{F}} = c \cdot \mathrm{F} \circ u$:

Substitutionsregel.

Satz 6.13 (Substitutionsregel oder umgekehrte Kettenregel). *Sei $f(u)$ stückweise stetig, $u = g(x)$ stetig differenzierbar und existiere die Verkettung $f \circ g$. Dann gilt*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du \quad \text{mit } u = g(x).$$

Dabei meint die rechte Seite die Funktion $F(g(x))$ für eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

Beweis: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Wegen der Kettenregel ist

$$F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Also ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$. ∎

Bemerkung 6.14.

(i) Schreibt man $u'(x) = du(x)/dx$, so besagt obiger Satz

$$\int f(u(x))du(x)/dx \cdot dx = \int f(u)du.$$

Also kann man sich dies als Kürzungsregel merken.

(ii) Beim bestimmten Integral gilt unter obigen Voraussetzungen also die Formel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Hier haben wir einfach das Einsetzen $u = g(x)$ durch Abändern der Integrationsgrenzen durchgeführt.

Exempel 6.15.

(i) Wir bestimmen $\int \cos(\ln x)\,dx$. Hierzu setzen wir $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \ln x$. Dann gilt

$$\int \cos(\ln x) = \int f(u)du = \sin(\ln(x)) \quad \text{mit } u = g(x).$$

Satz 6.16. *Im Allgemeinen geht man nach folgendem Schema vor:*

(i) *Aufstellung der Substitutionsgleichungen*

$$u = g(x), \quad \Longrightarrow \; du/dx = g'(x), \Longrightarrow \quad dx = du/g'(x).$$

(ii) *Einsetzen von $dx = du/g'(x)$ in das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$. Jetzt muss man hoffen, $g(x)$ so geschickt gewählt zu haben, dass der Integrand nur noch von u abhängt, also*

$$\int f(x)\,dx = \int \phi(u)du \quad \text{für eine Funktion } \phi(u).$$

(iii) *Nun hoffen wir eine Stammfunktion $\Phi(u)$ mit $\Phi'(u) = \phi(u)$ zu finden.*

(iv) *Dann ist $\Phi(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(x)$.*

Beweis: Wir begründen dies kurz: Wir ersetzen also $f(x) = \tilde{f}(g(x))$ im Integranden, es gilt also

$$\int f(x)\,dx = \int \tilde{f}(g(x))\,dx.$$

Damit wir die Substitutionsregel anwenden können, erweitern wir künstlich, also

$$\int \tilde{f}(g(x))\,dx = \int \tilde{f}(g(x))g'(x)/g'(x)\,dx.$$

Wir hoffen nun also, dass die Funktion $\tilde{\phi}(x) := \tilde{f}(g(x))/g'(x)$ sich als Verknüpfung nach $g(x)$ schreiben lässt, also

$$\tilde{f}(g(x))/g'(x) = \tilde{\phi}(x) = \phi(g(x)) \quad \text{für eine Funktion } \phi(u).$$

Dann gilt nach der Substitutionsregel nun, dass

$$\int f(x)\,dx = \int \phi(g(x))g'(x) = \int \phi(u)du \quad \text{mit } u = \phi(x).$$

■

Exempel 6.17. Wir betrachten $f(x) = \cos x^2 \cdot x$, siehe [P, Bsp. 8.1.1]. Dann gilt

$$u = x^2, \quad \Longrightarrow \; du/dx = 2x, \quad \Longrightarrow \; dx = du/2x.$$

Einsetzen von $dx = du/2x$ liefert zunächst

$$\int x \cdot \cos x^2\,dx = \int x \cdot \cos u \cdot du/2x.$$

Hier fällt x weg, also

$$\int x \cdot \cos u du/2x = \int \cos u du/2 = 1/2 \sin u + C.$$

Wir setzen nun $u = g(x)$ und erhalten schließlich $1/2 \sin x^2 + C$.

Bemerkung 6.18. In diesem Fall sieht man wiederum direkt, dass, wenn wir $f(x) = \cos x$ und $g(x) = x^2$ setzen nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int \cos x^2 \cdot x\, dx = 1/2 \int f(x) g'(x)\, dx = 1/2 \int f(u) du \quad \text{mit } u = g(x).$$

Also wieder

$$\int \cos x^2 \cdot x\, dx = 1/2 \sin(x^2).$$

Exempel 6.19. Wir betrachten das Beispiel $\int \frac{6x^2}{(1-4x^3)^3}\, dx$. Dann hofft man, dass $u = g(x) = 1 - 4x^3$ funktioniert und es klappt! Nach Schema: Siehe [P, V.8.1.2 Beispiele (1)]. Aber auch so ist klar, dass $g(x)' = 12x^2 = 2 \cdot 6x^2$ und deshalb

$$\int \frac{6x^2}{(1-4x^3)^3}\, dx = 2 \cdot \int f(g(x)) g'(x)\, dx = 2 \cdot \int f(u) du \quad \text{mit } f(x) = 1/x^3.$$

Partialbruchzerlegung. Wir möchten die Stammfunktionen von rationalen Funktionen $g(x) = p(x)/q(x)$ für Polynome $p(x)$ und $q(x)$ berechnen. Mittels Polynomdivision können erhalten wir stets Polynome $s(x)$ und $r(x)$, sodass

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \quad \text{mit } \deg r < \deg q.$$

Also gilt $p(x)/q(x) = s(x) + r(x)/q(x)$ - für das Beispiel $g(x) = (2x^3 - 14x^2 + 14x + 30)/(x^2 - 4)$ siehe [P, V.8.3]. Wir wissen, wie wir $s(x)$ integrieren können. Für die echt rationale Funktion $f(x) = r(x)/q(x)$ - das heißt $\deg r < \deg q$ - können wir nach folgendem allgemeinen Verfahren vorgehen, siehe [P, V.8.3.1]:

(i) Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners (hier allesamt als reell vorausgesetzt!).

(ii) Jeder Nullstelle x_i von Vielfachheit n ordnen wir folgenden Partialbruch zu:

$$P(x_0) = A_1/(x - x_i)^1 + A_2/(x - x_i)^2 + \cdots + A_n/(x - x_i)^n$$

mit unbekannten Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(iii) Dann schreiben wir

$$r(x)/q(x) = P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_m) \quad \text{mit den Nullstellen } x_1, \dots, x_m. \tag{*}$$

(iv) Wir bringen alle Brüche im obigen Ausdruck (*) auf den gleichen Nenner und erhalten durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem in den $d = \deg q$ Variablen $A_1(x_i), \dots, A_n(x_i)$ für $i = 1, \dots, m$, das wir eindeutig nach diesen auflösen können.

Bemerkung 6.20.

(i) Ein Rat zum Raten der Nullstellen des Polynoms $q(x) = x^n + \cdots + a_0$. Man stelle sich vor, der Aufgabensteller möchte ein Polynom bilden, das vollständig in n reelle Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zerfällt. Es ist also $p(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$. Weiter wähle er sogar alle Nullstellen rational (um fairerweise den Rechenaufwand gering zu halten). Dann gilt : Sind alle Koeffizienten $a_n, \dots, a_n$ ganz, so auch die Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Da $a_0 = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ das Produkt dieser ist, folgt insgesamt: **Alle Nullstellen sind ganz teilen den konstanten Koeffizient** a_0.

(ii) Indem man geeignete x-Werte wie die Nennernullstellen $x_1, \dots, x_m$ und 0 einsetzt, lassen sich die Lösungen für die $A_1(x_i), \dots, A_n(x_i)$ mit $i = 1, \dots, m$ oft einfach ablesen.

(iii) Die zusätzlichen Summanden $A_2/(x - x_i)^2 + \cdots + A_n/(x - x_i)^n$ für Nullstellen höherer Vielfachheit sind nötig, damit sich das lineare Gleichungssystem in diesen Unbekannten überhaupt lösen lässt.

Exempel 6.21.

(i) Wir sind beispielsweise in folgender Situation: Wir möchten

$$\int \frac{b_1 x + b_0}{x^2 + a_1 x + a_0}\, dx$$

berechnen. Zu dieser Funktion kann man direkt keine Stammfunktion angeben. Hier hilft folgender Trick: Rate die Nullstellen α_1, α_2 des Polynoms $x^2 + a_1 x + a_0$. Dann gilt also

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{x-\alpha_1}-\frac{z_2}{x-\alpha_2} &= \frac{z_1(x-\alpha_1)-z_2(x-\alpha_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}\\ &= \frac{(z_1-z_2)x-z_1\alpha_1+z_2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$z_1-z_2=b_1 \quad \text{und} \quad z_1\alpha_1+z_2\alpha_2=b_0-\alpha_1\alpha_2.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen z_1,z_2 das wir hier direkt durch Einsetzen lösen können: $z_1 = z_2 + b_1$ und somit

$$b_0-\alpha_1\alpha_2 = z_1\alpha_1+z_2\alpha_2 = (z_2+b_1)\alpha_1+z_2\alpha_2 = (\alpha_1+\alpha_2)z_2+b_1\alpha_1,$$

also $z_2 = \frac{b_0-(\alpha_1+b_1)\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$ und damit berechnet sich $z_1 = \frac{b_0-(\alpha_1+b_1)\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}+b_1$.

(ii) Wir möchten $\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ bestimmen. Da alle Koeffizienten ganz sind und den konstanten Koeffizienten$a_0 = 2$ teilen, raten wir -1 und 2 als Nullstellen. Also gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-x-2} &= \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{z_1}{x+1}+\frac{z_2}{x-2}\\ &= \frac{z_1(x-2)+z_2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(z_1+z_2)x-2\cdot z_1+z_2}{(x+1)(x-2)}.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$z_1+z_2=0 \quad \text{und} \quad 2\cdot z_1+z_2=1.$$

Dies lösen wir jetzt auf, indem wir beispielsweise $z_2 = -z_1$ setzen.

(iii) Wir möchten $\int f(x)\,dx$ mit $f(x) = \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x}$ bestimmen. Polynomdivision liefert

$$x^3-x^2+x-1-x\cdot(x^2+x) = 2x^2-x+1.$$

Dann berechnen wir wieder

$$2x^2-x+1-2(x^2+x) = -3x+1.$$

Also gilt

$$x^3-x^2+x-1 = x\cdot(x^2+x)+2(x^2+x)-3x+1 = (x+2)(x^2+x)-3x+1.$$

Es ergibt sich
$$f(x) = (x+2) - \frac{3x+1}{x^2+x}.$$
Also $\int f(x)\,dx = \int (x+2)\,dx - \int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx$. Es bleibt also das zweite Integral mittels Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Wir raten mit der üblichen Vorüberlegung als Nullstellen -1 und 0, also $x^2 + x = (x+1)x$. Damit berechnen wir
$$\frac{3x+1}{x^2+x} = \frac{z_1}{x+1} + \frac{z_2}{x} = \frac{z_1 x + z_2 x + z_2}{x(x+1)}.$$
Es ergibt sich das Gleichungssystem
$$z_1 + z_2 = 3 \quad \text{und} \quad z_2 = 1.$$
Also $z_2 = 1$ und $z_1 = 2$. Damit gilt
$$\int \frac{3x+1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x+1) + \ln(x) + \mathrm{C}.$$
Insgesamt erhalten wir
$$\int f(x)\,dx = 1/2(x+2)^2 + \ln(x+1) + \ln(x) + \mathrm{C}.$$

(iv) Hier ein Beispiel mit einer doppelten Nullstelle:
$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4},$$
siehe hierzu [P, V.8.3.1. Bsp. (2)].

Übung 6

(i) Bestimme die folgenden Integrale durch Zurückführen auf Grundintegrale [P, V.5, Tabelle 1], siehe hierzu die ausgedruckte Tabelle.

(a) $\int x^2 + 2x + 1/x \, dx$

(b) $\int \frac{x-2}{x^3} \, dx$

(c) $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$

(d) $\int (\sqrt{x} - 1)^3/x \, dx$

(e) $\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)} \, dx$

(f) $\int (\sin x - \cos x + \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{7}{\sin^2 x}) \, dx$

(g) $\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$

(h) $\int \tan^2 x \, dx$

(ii) Bestimme die folgenden Integrale durch partielle Integration:

(a) $\int x \ln x \, dx$

(b) $\int x \cos x \, dx$

(c) $\int x^2 e^2 x \, dx$

(d) $\int (\ln x)^2 \, dx$

(iii) Bestimme die folgenden Integrale durch Substitution:

(a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(b) $\int e^{\cos x} \sin x \, dx$

(c) $\int e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x} \, dx$

(d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} \, dx$

(e) $\int \frac{\cos \ln x}{x} \, dx$

(f) $\int \frac{1}{\sin(4x-2)} \, dx$

(iv) Berechne die folgenden Integrale durch Anwendung der partiellen Integration oder der Substitutionsregel:

(a) $\int \arctan x \, dx$

(b) $\int (2x-3)\cos(5x+1)\, dx$

(c) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{7x-5}}\, dx$

(d) $\int \frac{3x-1}{\cos^2(5x+6)}\, dx$

(e) $\int (\frac{2}{3}x-5)e^{4-3x}\, dx$

(v) Berechne die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\int \frac{5x^3+9x^2-22-8}{x^3-4x}\, dx$

(b) $\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12}\, dx$

(c) $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\, dx$

Lösungen

(i)
(a) $x^3/3 + x^2 + \ln|x| + C$
(b) $2/3x\sqrt{x} + 3/4x\sqrt[3]{x} + C$
(c) $2/3x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$
(d) $2/3x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x|$
(e) $3/2 \arctan x - 1/2 \operatorname{arsinh} x + C$
(f) $-\cos x - \sin x + 2\tan x + 7\cot x + C$
(g) $1/3x^3 - x + \arctan x + C$
(h) $\tan x - x + C$, schreibe $\tan^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$.

(ii)
(a) $x^2/2 \ln x - x^2/4 + C$
(b) $x \sin x + \cos x + C$
(c) $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
(d) $x[(\ln x - 1)^2 + 1] + C$

(iii)
(a) $1/4 \sin^4 x + C$
(b) $-e^{\cos x} + C$
(c) $2e^{\sqrt{x}} + C$
(d) $-\sqrt{1 + 2\cos x} + C$
(e) $\sin \ln x + C$
(f) $1/4 \ln|\tan(2x - 1)| + C$

(iv)
(a) $x \arctan x - 1/2 \ln(1 + x^2) + C$, zunaechst part. Int. mit $f' = 1, g = \arctan x$.
(b) $\frac{2x-3}{5} \sin(5x + 1) + 2/25 \cos(5x + 1) + C$, zunaechst part. Int.
(c) $2/49\sqrt{7x - 5} \cdot (7x + 24) + C$, zunaechst part. Int.
(d) $(43/27 - 2/9x)e^{4-3x} + C$

(v) (a) $5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C$

(b) $4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C$

(c) $2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$

7 Berechnung von Flächeninhalten mittels bestimmter und uneigentlicher Integrale

In diesem Kapitel wollen wir Integrale über Intervalle berechnen, in der mindestens eine der Grenzen nicht mehr zum Definitionsbereich der Funktion gehört. Etwa $[a,b[$ für $b=\infty$ oder b eine Polstelle (Bild!). Die größte Hürde hierbei ist die Bestimmung einer Stammfunktion mit der wir uns im vorigen Kapitel beschäftigt haben.

7.1 Rechenregeln über abgeschlossenen Intervalle

Satz 7.1. *Es gelten die Faktor- und Summenregel (das heißt, die Linearität des Integrals), die Vertauschungsregel (bezüglich der Integrationsgrenzen) und die Zerlegungsregel (bezüglich Teilintervallen). Siehe hierfür [P, V.7].*

Zur Erinnerung:

Satz. *Sei* F *eine Stammfunktion der auf* $[a,b]$ *stückweise stetigen Funktion* $f(x)$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

7.2 Bestimmung von Flächeninhalten

Die Interpretation als Flächeninhalt von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist nur zulässig, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ (Bild!). Ist dort $f(x) \leq 0$, so beschreibt die Spiegelung $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt. Allgemein gilt also $A_a^b f(x) = \int_a^b |f(x)|\,dx$, falls $A_a^b f(x)$ den Flächeninhalt zwischen x-Achse und Grafem von $f(x)$ bezeichne. Dies beschreiben wir nun ausführlicher.

Definition 7.2. Bei der Berechnung des Flächeninhalts A zwischen einer Kurve $f(x)$ und der x-Achse auf dem Intervall $\in [a,b]$ sind zu unterscheiden:

(i) Ist $f(x) \geq 0$ (Kurve oberhalb der x-Achse), so $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) Ist $f(x) \leq 0$ (unterhalb), so $A = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (Spiegelung).

(iii) Es gilt teils $f(x) \leq 0$, teils $f(x) \geq 0$. Dann zerlegen wir $[a,b]$ in Intervalle $[t_0,t_1],\ldots,[t_{n-1},t_n]$, sodass entweder $f(x) \geq 0$ oder $f(x) \leq 0$ auf $[t_i,t_{i+1}]$ für $i = 0,\ldots,n-1$. Wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = A([t_0,t_1]) + \cdots + A([t_{n-1},t_n]),$$

wobei $A([t_i,t_{i+1}]$ den Flächeninhalt auf dem Intervall $[t_i,t_{i+1}]$ bezeichnet — dieser lässt sich mit den ersten beiden Fällen bestimmen.

Bemerkung 7.3. Tritt der dritte Fall auf, so haben wir die Nullstellen $t_1,\ldots,t_{n-1}$ zu bestimmen. Dann gilt entweder $f(x) \leq 0$ oder $f(x) \geq 0$ für x zwischen zwei Nullstellen t_i,t_{i+1}.

Exempel 7.4. Wir bestimmen den Flächeninhalt von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ auf $[-2\frac{1}{2},3]$. 1. Nullstellen raten. 2. Testen, ob $f(x) \leq 0$ oder $f(x) \geq 0$ für einen Wert x zwischen zwei Nullstellen, siehe [P, Beispiel 10.2.1].

7.3 Der Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Wir wollen die Fläche A zwischen zwei Funktionen $f \geq g \geq 0$ auf dem Intervall $[a,b]$ berechnen (Bild!). Es ist dies die Differenz zwischen den beiden Flächen, also

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f - g(x)\,dx.$$

Definition 7.5. Der Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ berechnet sich durch den Flächeninhalt der Kurve $h(x) = f(x) - g(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$, das heißt durch $\int_a^b |h(x)|\,dx$ (wie im vorigen Abschnitt).

Bemerkung 7.6. Wir haben also die Nullstellen der Funktion $h(x)$ zu bestimmen und das Vorzeichen der Integrale zischen diesen (und den Integrationsgrenzen) entsprechend anzupassen.

Exempel 7.7. Wir möchten die Fläche zwischen den Kurven $f(x) = -1/2x^2+6$ und $g(x) = 3/2x+2$, in der $f(x)$ oberhalb von $g(x)$. Dann bestimmen wir $x = -4{,}7; 1{,}7$ als Nullstellen von $h(x) = f(x) - g(x)$ und berechnen $A = \int_{-4,7}^{1,7} h(x)$, siehe [P, V. 10.2.2 Beispiele (1)].

7.4 Integration über ein unendliches Integrationsintervall

Exempel 7.8. Wir berechnen $\int_1^\infty 1/x^3\,dx$: Erst $I(\lambda)$, dann $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = 1/2$, siehe [P, V.9.1. Beispiele (1)].

Definition 7.9. Zur Berechnung von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ gehen wir wie folgt vor:

(i) Wir berechnen für ein $a \leq \lambda < \infty$ das Integral

$$I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,dx.$$

(ii) Dann setzen wir, falls vorhanden,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\,dx.$$

Existiert dieser Grenzwert, nennen wir das Integral **konvergent**, andernfalls **divergent**. Analog setzen wir

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to\infty} \int_\lambda^b f(x)\,dx$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^\lambda f(x)\,dx.$$

Exempel 7.10.

(i) Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und der x-Achse, siehe [P, V.8.1. Beispiele (2)].

(ii) Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sqrt{x}\,dx$ existiert nicht, da der Flächeninhalt beliebig groß wird, siehe [P, V.9.1. Beispiele (3)].

7.5 Integrand mit einer Polstelle

Hierbei müssen wir über halboffene Intervalle integrieren. Wir möchten zum Beispiel gerne den Flächeninhalt des Grafen von $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ im Intervall $[-1,1]$ bestimmen(Bild!) . Da $f(x)$ für $x = 0$ nicht definiert ist, müssen wir einen Grenzübergang durchführen.

Definition 7.11. Habe die Funktion $f(x)$ bei $x = b$ eine Polstelle. Dann erklären wir $\int_a^b f(x)\,dx$ wie folgt.

(i) Wir berechnen für ein $a \leq b - \varepsilon < b$ das Integral

$$\mathrm{I}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

(ii) Dann setzen wir, falls vorhanden,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Existiert dieser Grenzwert, nennen wir das Integral **konvergent**, andernfalls **divergent**. Analog setzen wir, falls $x = a$ eine Polstelle ist,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Liegt eine Polstelle $c \in [a,b]$ zwischen den Endpunkten, so setzen wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Exempel 7.12.

(i) Wir bestimmen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$, siehe hierzu [P, V.9.2. Beispiele (1)].

(ii) Wir bestimmen $\int_{-1}^1 1/\sqrt[3]{x}\,dx$.

Übung 7

(i) Bestimme folgende bestimmte Integrale:

(a) $\int_1^3 x^3\,dx$

(b) $\int_1^2 (x^2 + 1/x^4)\,dx$

(c) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$

(d) $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$

(e) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}\,dx$

(f) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx$

(g) $\int_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a - x^2}\,dx$

(h) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$

(i) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

(ii) Bestimme folgende uneigentlichen Integrale:

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(c) $\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$

(d) $\int_0^\infty x^2 e^{-x/2}\,dx$

(e) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(iii) Bestimme folgende uneigentliche Integrale mit Polstellen im Integrationsbereich:

(a) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

(b) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

(c) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

(d) $\int_{0,5}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$

(iv) Berechne den Inhalt der Flächen, die von den gegebenen Kurven begrenzt werden (Skizze!):

(a) $y = 4 - x^2, y = 0$

(b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

(c) $y = x^3, y = 8, x = 0$

(d) Eine Halbperiode (Wellenberg) von $y = \sin x$ und $y = 0$.

(e) $y = x^2, y = 2 - x^2$

(v)

Bemerkung. Ist eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, so berechnet sich die (Bogen)länge dieser durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Der Weg eines Autos sei durch die Funktion $(x(t), y(t))$ mit $x(t) = 7t^2$ und $y(t) = \sqrt{t^3}$ beschrieben. Mit wieviel km/h fährt es, wenn t die Anzahl der verstrichenen Sekunden misst?

Lösungen

(i)
  (a) 20
  (b) $2\frac{5}{8}$
  (c) $\frac{\pi}{12a}$
  (d) $\frac{1}{2}$
  (e) $2(1+\ln 2)$
  (f) $1/3$
  (g) $\frac{\pi a^2}{16}$
  (h) $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$
  (i) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}$

(ii)
  (a) 1
  (b) ∞, divergent
  (c) $1/2$
  (d) 16
  (e) $\pi/6$

(iii)
  (a) $6\sqrt[3]{2}$
  (b) divergent
  (c) $1/\ln 2$
  (d) 0

(iv)
  (a) $32/3$
  (b) πab
  (c) 12
  (d) 2
  (e) $8/3$

8 Funktionen mehrerer Variablen

(i) Bisher: Funktionen $f(x)$ einer Variablen. Zum Beispiel oft in Abhängigkeit der Zeit t wie die Wegfunktion $s(t)$ eines Autos.

(ii) Jetzt: Funktionen $f(x_1, \ldots, x_d)$ in mehreren Variablen. Zum Beispiel oft in Abhängigkeit der Position (x,y,z) im Raum wie die Raumtemperatur-Funktion $\mathrm{T}(x,y,z)$ in Abhängigkeit des Ortes.

8.1 Funktionen zweier Variablen

Zwei ist die höchste Anzahl von Variablen für die sich die Funktionsgrafen noch darstellen lassen, daher wollen wir mit diesen anfangen. Wir schreiben $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für eine Funktion $f(x,y)$ zweier Variablen.

Exempel 8.1.

(i) Die geschlossene Halbkugelschale

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$

auf $\mathrm{D} = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 1\}$ (Projektor!).

(ii) Die offene Halbkugelschale $f(x,y) = \|(x,y)\|$ mit $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ auf dem Definitionsbereich $\mathrm{D} = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 1\}$. Diese Funktion gibt die Länge des Vektors (x,y) an .

Definition 8.2. Die **Höhenlinie** einer Funktion $f\colon \mathrm{R}^2 \to \mathbb{R}$ zur Höhe c ist die Menge aller (x,y) mit $f(x,y) = c$.

Bemerkung 8.3.

(i) **Höhen**linie also deshalb, weil $f(x,y)$ dort anschaulich die Höhe c über der x,y-Ebene hat (Projektor!).

(ii) Im Beispiel $f(x,y) = \|(x,y)\|$ ist die Höhenlinie $\mathrm{H}(r)$ zur Höhe r gerade

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(r) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|(x,y)\| = r\}\\ &= \{\text{ Vektoren der } x,y\text{-Ebene der Länge } r\}.\end{aligned}$$

Stetigkeit in mehreren Variablen. Wir möchten erklären, was eine (vektorwertige) stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ in mehreren Variablen ist. Zur Erinnerung:

Definition. Die Funktion $f(x)$ ist **stetig** im Punkt x_0, wenn es für jeden noch so kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, falls $|x - x_0| \leq \delta$.

Anschaulich besagte dies: Der Abstand der Funktionswerte $f(x)$ zu $f(x_0)$ ist sehr klein, wenn der Abstand von x zu x_0 genügend klein ist. Wir möchten also den Abstandsbegriff auf mehrere Variablen verallgemeinern.
Im eindimensionalen der Abstand zweier Punkte $x,y \in \mathbb{R}$ durch den Absolutbetrag $|x - y|$ ausgedrückt, die Länge von $a := x - y \in \mathbb{R}$. Im mehrdimensionalen ist die Länge von $a \in \mathbb{R}^n$ durch $\|a\| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_d^2}$ gegeben (Pythagoras!). Daher ist der Abstand von $x,y \in \mathbb{R}^d$ durch $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$ gegeben. Es folgt:

Definition 8.4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ ist **stetig** im Punkt x_0, wenn es für jeden noch so kleinen Abstand $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, falls $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Bemerkung 8.5.

(i) Im eindimensionalen haben wir oft Umgebungen $\mathrm{B}_{<\varepsilon}(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$ betrachtet. Dies waren kleine offene Intervalle um den Punkt x_0 (Bild!). Im zweidimensionalen ist $\mathrm{B}_{<\varepsilon}(x_0)$ eine offene Kreisscheibe um x_0 vom Radius ε, im dreidimensionalen ein Ball.

(ii) Wir möchten dies am Beispiel der geschlossenen Halbkugelschale

$$f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

und dem Punkt $x_0 = 0$ veranschaulichen. Stetigkeit heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kreisscheibe D um 0, sodass der Abstand der Höhen dort weniger als ε von $f(0) = 1$ abweicht. Hier ist $\mathrm{D} = \mathrm{B}_{<\varepsilon}(1)$.

8.2 Einschub: Vektorwertige Funktionen einer Variablen

Exempel 8.6. Die Ortsfunktion $o(t) = (x(t), y(t))$ eines Autos in Abhängigkeit von t (Bild!).

Definition 8.7. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ eine vektorwertige Funktion. Dann ist

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

und wir nennen $f_1, \ldots, f_d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen von f.

Satz 8.8. *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann stetig bzw. differenzierbar, wenn es alle Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_d$ sind.*

Bemerkung 8.9. Dies zeigt, dass wir das Studium der Eigenschaften vektorwertiger Funktionen auf den Fall reellwertiger zurückführen können. Für uns ist also tatsächlich der Fall mehrerer Argumente interessanter als der mehrerer Werte.

8.3 Partialfunktionen und Differenzierbarkeit in mehreren Variablen

Exempel 8.10. Betrachte die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$. Dann können wir etwa $y = y_0$ festlassen, sodass $f(x, y_0)$ Funktion einer Variablen ist. Zum Beispiel $y = y_0 = 1$. Dann hängt $f(x,y) = f(x,1) = x^2 + 1$ nur noch von x ab. Wir nennen $p_1(x)$ die erste Partialfunktion in $y = 1$.

Definition 8.11. Sei $f(x_1, \ldots, x_d)$ eine Funktion mehrerer Variablen. Dann ist die **erste Partialfunktion** mit festen Argumenten

$$(x_2, \ldots, x_d) = (c_2, \ldots, c_d)$$

gegeben durch $p_1(x) := (x, c_2, \ldots, c_d)$. Analog für die $2., 3., \ldots, d$. Partialfunktion.

Bemerkung 8.12. Man schreibt der Bequemlichkeit halber gerne $p_1(x) = f(x_1, c_2, \ldots, c_d)$ oder sogar einfach $p_1(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ und vereinbart, dass x_1 als einziges Argument variabel bleibt und nicht festgelassen wird.

Exempel 8.13. Wir können die Partialfunktionen wie gewöhnlich ableiten. Sei etwa $p_1(x) = f(x,y)$ die erste Partialfunktion von $f(x,y) = yx^2 + y^2$. Dann betrachten wir y als **Konstante**, also $p_1'(x,y) = y \cdot 2x + 0 = 2y \cdot x$. Wir schreiben hierfür $\frac{\partial f}{\partial x}$, da wir die x-Koordinate abgeleitet haben. Es ist $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$.

Definition 8.14. Sei $f(x_1,\dots,x_d)$ eine Funktion mehrerer Variablen. Dann ist die **erste partielle Ableitung** $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = p_1'(x_1) := (x_1,x_2,\dots,x_d).$$

Analog für die $2.,3.,\dots,d.$ partielle Ableitung.

Bemerkung 8.15. Es sei nochmal betont, dass die Argumente $x_2,\dots,x_d$ bei der ersten Ableitung sämtlich als Konstanten aufgefasst werden. Zum Beispiel: $f(x_1,x_2) = x_1^2 \cdot e^{x_2} + \arctan x_2$, dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \cdot e^{x_2} + 0 = 2e^{x_2}x_1$.

Bemerkung 8.16. Geometrisch: Für eine Funktion $f(x,y)$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ die Steigung, die man im Punkte (x_0,y_0) sieht, wenn man sich in x-Richtung auf dem Graphen bewegt (Projektor!).

Definition 8.17. Der Gradient $\operatorname{grad} f$ einer Funktion $f(x_1,\dots,x_d)$ ist definiert durch

$$\operatorname{grad} f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0)).$$

Bemerkung 8.18. Dieser wird stets in Zeilenschreibweise geschrieben.

Durch diesen lassen sich Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t \cdot h) - f(x)}{t}$$

entlang aller möglichen Richtungen $h \in \mathbb{R}^d$ berechnen (bisher entlang der x_i-Achsen für $i = 1,\dots,d$.)

Satz 8.19. *Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ der Funktion f in h-Richtung für $h \in \mathbb{R}^d$ ist gegeben durch*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot h^{\mathrm{T}}.$$

Bemerkung 8.20.

(i) Dies ist das Skalarprodukt zweier Vektoren: $x \cdot y^{\mathrm{T}} := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d = \|x\| \|y\| \cos \alpha$, wobei $\alpha =$ Winkel zwischen x,y. Also ist $x \cdot y$ unter allen Vektoren fester Länge maximal, wenn x und y Vielfache voneinander sind.

(ii) Also ist die Richtungsableitung in x_0 maximal, wenn wir nach $\operatorname{grad} f(x_0)$ ableiten. Geometrisch: Der Gradientenvektor zeigt in Richtung der maximalen Steigung (und seine Länge ist ein Mass dieser)!

Exempel 8.21. Die Funktion $f(x,y,z) = z^2 \cdot e^{-xy}$ soll in $x_0 = (-1,1,3)$ in Richtung von $h = (-2,1,2)$ abgeleitet werden.

8.4 Finden lokaler Extrema

Im Mehrdimensionalen muss die Differenzierbarkeit anders als im Eindimensionalen erklärt werden: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ und wir können nicht durch einen Vektor h teilen. Es gilt aber:

Satz 8.22. *Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion mehrerer Variablen. Dann ist f differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$ existieren und **stetig** sind.*

Wie im eindimensionalen ist es anschaulich klar, dass die Steigung in einem lokalen Extremum verschwinden muss. Daher gilt:

Satz 8.23. *Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion mehrerer Variablen. Ist x_0 ein lokales Extremum von f, so müssen alle Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}$ verschwinden, das heißt*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0.$$

Bemerkung 8.24.

(i) Wie oben bemerkt, gibt $\operatorname{grad} f(x_0)$ die Richtung der größten Steigung im Punkt x_0 an und seine Länge misst diese. Daher gilt

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \iff \text{Alle Steigungen verschwinden.}$$

(ii) Ein hinreichendes Kriterium im zweidimensionalen Fall ist, dass

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)_{i,j=1,2} > 0.$$

Hierbei ist $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j})_{i,j=1,2}$ die Matrix, in der die in der beispielsweise im Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte die Ableitung $\frac{\partial h(x)}{\partial y}$ der Funktion $h(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ steht. Die Determinante wird in der linearen Algebra erklärt.

Übung 8

(i) Bilde die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

  (a) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - y^3$

  (b) $g(x,t) = \ln(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}})$

  (c) $f(x,y) = xe^{-yx}$

  (d) $f(x,y) = \frac{x}{3y-2x}$

  (e) $h(x,t) = \ln\sin(x - 2t)$

(ii) (a) Berechne die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

  (1) $z(x,y) = \ln(y - x^2)$

  (2) $w(u,v) = \arctan\frac{u+v}{1-uv}$

  (3) Berechne die partiellen Ableitungen dritter Ordnung: $z(x,y) = x^3 + x^2y + y^3$

(iii) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$.

  (a) Berechne $\operatorname{grad} f$ allgemein und im Punkte $(3,4)$.

  (b) Zeichne die durch den Punkt $(3;4)$ verlaufende Höhenlinie und ihren Gradienten.

(iv) Berechne die Ableitung der Funktion $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ im Punkt $P := (1,2)$ in der Richtung, die von P nach $Q := (4,6)$ weist.

(v) Berechne $\operatorname{grad} u$ im Punkt $P = (1,2,3)$ für $u = f(x,y,z) = xyz$.

Lösungen

(i) (a) $f_x = 3x(x+2), f_y = 3(x^2 - y^2)$.

(b) $g_x = \frac{\sqrt[3]{t}}{3x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{t})}$, $g_y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3t(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x})}$

(c) $f_x = e^{-xy}(1 - xy), f_y = -x^2 e^{-xy}$

(d) $f_x = \frac{3y}{(3y-2x)^2}, f_y = \frac{-3x}{(3y-2x)^2}$

(e) $h_x = \cot(x - 2t), h_t = -2\cot(x - 2t)$

(ii)

$$z_{xx} = \frac{2(y+x^2)}{(y-x^2)^2}, z_{xy} = \frac{2x}{(y-x^2)^2}, z_{yy} = \frac{1}{(y-x^2)^2}$$

(2) $w_{uu} = \frac{-2u}{(1+u^2)^2}, w_{uv} = 0, w_{vv} = \frac{-2v}{(1+v^2)^2}$

$z_{xxx} = 6, z_{xxy} = 2, z_{xyy} = 0, z_{yyy} = 6$.

(iii) (a) $\operatorname{grad} z = (2x, 2y), \operatorname{grad} z_{|(3,4)} = (6,8)$

(b) Die Niveaulinie ist der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $r = 5$.

(iv) Es ist $h := v(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (3,4)$ und $\frac{\partial z}{\partial h} = (-1,2)(3,4)^{\mathrm{T}} \cdot 1/5 = 1$.

(v) Es ist $\operatorname{grad} u_{|(1,2,3)} = (6,3,2)$.

Rückblick

(i) Folgen und Reihen.

(a) Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an.

(1) $\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}$

(3) $\sqrt{n^2+n} - n$

(4) $(1 - \frac{5}{n})^{\frac{n}{4}+3}$

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen mittels der Kriterien aus der Vorlesung.

(1) $1/2 + 3/4 + 5/6 + 7/8 + \cdots$

(2) $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \cdots$

(3) $\sum_{k\geq 1} (\frac{2}{3})^k$

(4) $\sum_{k\geq 0} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{3^n}$

(c) In genau welchem offenen Intervall sind nachfolgende Reihen konvergent?

(1) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

(2) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{2^k}$

(3) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$

(ii) Ableitungen und Taylorpolynome.

(a) Bestimmen sie folgende uneigentlichen Grenzwerte. Ist dieser $\pm\infty$, so zeigen Sie dies (mittels Definition 2.4).

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1+\sin x}{2x^2}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-2}{4}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+1}$

(b) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der folgenden Funktion und beweisen sie dies mittels Definition 3.3.

(1) $f(x) = 5x^2 + 2x$

(c) Bilde von folgenden Funktionen die erste Ableitung.

(1) $f(x) = \frac{\pi x}{1-x^2}$

(2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

(3) $f(x) = \frac{7x^2-6x}{e^x}$

(4) $f(x) = \frac{x^4}{4}((\ln x)^2 - \ln\sqrt{x} + \frac{1}{8})$

(5) $\sqrt{x + 2\sqrt{x}}$

(6) $f(x) = \ln(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x^2+1})$

(d) Entwickle das Taylorpolynom von $f(x)$ an der Stelle x_0 bis zum n-ten Glied einschliesslich.

(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x_0 = 2$ und $n = 3$

(2) $f(x) = 2^x$ für $x_0 = 1$ und $n = 4$.

(iii) Kurvendiskussion: Untersuchen Sie folgende Funktionen auf ihren Definitionsbereich, Wertebereich, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Grenzwerte am Rande des Definitionsbereichs, lokale Extrema und Wendepunkte. Bestimmen Sie in diesen die Tangentialgleichung.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

(b) $f(x) = x^2 \ln x$

(iv) Integralrechnung.

(a) Berechne die folgenden Integrale durch Zurückführen auf Grundintegrale.

(1) $\int \frac{10x^8+3}{x^4}\, dx$

(2) $\int \frac{\sqrt{2x\sqrt{3x}}}{\sqrt[4]{x^3}};\, dx$

(3) $\int e^{-x}\, dx$

(b) Bestimme folgende Integrale durch Anwenden partieller Integration oder Substitution.

(1) $\int x \sin x \, dx$

(2) $\int \ln x \, dx$

(3) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$

(4) $\int e^{x^3} x^2 \, dx$

(5) $\int (\frac{x}{2} - 1) \ln(3x + \frac{1}{5}) \, dx$

(c) Bestimme folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung.

(1) $\int \frac{8x^2-2x-43}{(x+2)^2(x-5)} \, dx$

(2) $\int \frac{2x^7+4x^6-2x^5-4x^4+4x^3}{x^3+2x^2-x-2} \, dx$

(3) $\int \frac{2x^4-12x^3+18x-2x-1}{x^3-6x^2+9x} \, dx$

(d) Bestimme folgende uneigentlichen Integrale.

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} \, dx$

(2) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2} \, dx$

(v) Partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen: Bilde von folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

(a) $c(a,b,\gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$

(b) $f(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

(c) $g(x,t) = \frac{2x-t}{x+2t}$

(d) $g(x,y) = \sin^2(x + y) - \sin^2 x - \sin^2 y$

(e) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

Lösungen

(i) (a) (1) 0

(2) $1/2$

(3) $1/2$

(4) $\frac{1}{e\sqrt[4]{e}}$

(b) (1) konvergiert nicht

(2) konvergent

(3) divergent

(4) konvergent

(c) (1) $r = 1$

(2) $r = 2$

(3) $r = 1$

(ii) (a) (1) 2

(2) ∞

(3) ∞

(b) (1) Binomialformel

(c) (1) $\pi \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

(2) $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

(3) $\frac{-7x^2+20x-6}{e^x}$

(4) $x^3(\ln x)^2$

(5) $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$

(6) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(d) (1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x-2}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{32\sqrt{2}}(x-2)^2 - \frac{5}{128\sqrt{2}}(x-2)^3$

(2) ...

(iii) (a) (1) $D = W = \mathbb{R}, x_{N_1} = 0, x_{N_{2,3}} = 1{,}5 \pm 1{,}5\sqrt{5}, x_{\max} = -1, x_{\min} = 3, x_W = 1, t_W(x) = -4x + 1/3, \lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$

(2) $D =]0,\infty[, W = [\frac{-1}{2e}[, x_N = 1, \lim_{x\to 0} = 0, \lim_{x\to\infty} = \infty, x_{\min} = e^{-1/2}, x_W = e^{-3/2}, t_W(x) \approx 0{,}446x + 0{,}025$

(b) (1) $2x^5 - \frac{1}{x^3}$

(2) $\sqrt{2\sqrt{3x}}$

(3) $-e^{-x}$

(c) (1) part. Int. mit $f(x) = x, g'(x) = \sin x$

(2) $x \ln x - x$ mit $g'(x) = 1$

(3) $\frac{1}{2\cos^2 x}$

(4) $\frac{1}{3}e^{x^3}$

(5) $(\frac{x^2}{4} - x - \frac{61}{900} \cdot \ln(3x + \frac{1}{5}) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{61}{60}x$

(d) (1) $5 \cdot \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 3 \cdot \ln|x-5|$

(2) $2/5x^5 + \frac{2}{3} \cdot \ln|x-1| + 2 \cdot \ln x + 1 - \frac{32}{3} \cdot \ln x + 2 + 4x$

(3) $x^2 + \frac{1}{9} \cdot \ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{7}{3(x-3)}$

(e) (1) divergent

(2) $\ln 2$

(iv) (a) $f_x = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{z}, f_y = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, f_z = \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}$

(b) $c_a = \frac{a - b\cos y}{c}, c_b = \frac{b - a\cos\gamma}{c}, c_\gamma = \frac{ab\sin\gamma}{c}$

(c) $g_x = \frac{5t}{(x+2t)^2}, g_t(\frac{-5}{(x+2t)^2}$

(d) $g_x = 2\sin y\cos(2x+y), g_y = 2\sin x\cos(x+2y)$

(e) $f_x = yze^{xyz}, f_y = xze^{xyz}, f_z = xye^{xyz}$

Literaturverzeichnis

[P] L.Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwisschenschaftler, Band 1*, Vieweg, 12. Auflage, 2008.

[FF] Fetzer, Fränkel, *Mathematik 1*, Springer, 7. Auflage, 2002.

Email-Adresse: enno.nagel@uni-muenster.de